

Teoría de Medida e Integración

Taller 13

Medidas complejas; teorema de Radon-Nikodym.

Fecha de entrega: 22 de noviembre de 2019

1. Sea (X, \mathfrak{A}) un espacio medible, sean μ y ν medidas con signo sobre \mathfrak{A} .

(a) Demuestre que para todo $A \in \mathfrak{A}$ lo siguiente es equivalente:

- (i) A es μ -nulo.
- (ii) A es μ^+ -nulo y μ^- -nulo.
- (iii) A es $|\mu|$ -nulo.

(b) Demuestre que lo siguiente es equivalente:

- (i) $\mu \perp \nu$.
- (ii) $\mu^+ \perp \nu$ y $\mu^- \perp \nu$.
- (iii) $|\mu| \perp \nu$.
- (iv) $|\mu| \perp |\nu|$.

2. Sea (X, \mathfrak{A}) un espacio medible y sean μ y ν medidas con signo y sea $\nu = \varrho + \sigma$ la descomposición de ν de Lebesgue con respecto a μ .

Demuestre que $|\nu| = |\varrho| + |\sigma|$ es la descomposición de $|\nu|$.

3. Sean μ, ν, ω medidas σ -finitas sobre la σ -álgebra \mathfrak{A} con $\mu \ll \nu \ll \omega$. Muestre que $\mu \ll \omega$ y que

$$\frac{d\mu}{d\omega} = \frac{d\nu}{d\omega} \frac{d\mu}{d\nu}.$$

4. Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado en \mathbb{R} y suponga que la sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Demuestre que $\text{Var}_a^b f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Var}_a^b f_n$.