Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración — Taller 12

Medidas complejas; teorema de Radon-Nikodym. Fecha de entrega: 14 de noviembre de 2019

---

1. Sea μ una medida con signo sobre la σ-álgebra $\mathfrak{A}$ y sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$. Demuestre

   (i) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \quad \Longrightarrow \quad \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$,

   (ii) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \quad \Longrightarrow \quad \mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

2. Sean μ, ν medidas complejas sobre una σ-álgebra $\mathfrak{A}$. Muestre que $\nu \ll \mu$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|\nu(A)| < \varepsilon$ si $A \in \mathfrak{A}$ con $|\mu|(A) < \delta$.

3. Sea $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ una medida compleja.

   (a) Muestre que existe una función $g : X \to \mathbb{C}$ tal que $|g| = 1$ y $\mu = g \odot |\mu|$.

   (b) Para $f \in \mathscr{L}_1(X, \mu)$ muestre que $f \in \mathscr{L}_1(X, |\mu|)$ y que

   $$\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}|\mu|,$$

   donde

   $$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \int_X f \,\mathrm{d}\,\mathrm{Re}(\mu)^+ - \int_X f \,\mathrm{d}\,\mathrm{Re}(\mu)^- + \mathrm{i}\int_X f \,\mathrm{d}\,\mathrm{Im}(\mu)^+ + \mathrm{i}\int_X f \,\mathrm{d}\,\mathrm{Im}(\mu)^-.$$

4. Sea $\mathfrak{B}$ la σ-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$ y β la medida de Borel-Lebesgue sobre $\mathfrak{B}$. Sea μ una medida de Borel sobre $\mathbb{R}$ tal que la función de distribución

   $$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} -\mu((x,0]), & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \mu((0,x]), & x > 0 \end{cases}$$

   es derivable y φ' es continua. Muestre que $\varphi'(x) = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\beta}(x) =$ la derivada de Radon-Nikodym.