Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración   Taller 11

Regularidad de medidas.   Fecha de entrega: 31 de octubre de 2019

---

1. Muestre que la medida de Borel en $\mathbb{R}$ es regular.

2. Sea $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la compactificacíon del espacio discreto $(\mathbb{N}, \mathbb{P}\mathbb{N})$. Muestre:
   (a) Un conjunto $A \subseteq X$ es compacto, si y sólo si es finito o contiene ∞.
   (b) Muestre que la medida de conteo sobre X no es localmente finita, no es outer regular, pero es inner regular.

Sobre $\mathbb{R}$ consideramos $\mathcal{T}$ la topología usual (euclidiana) y la topología $\mathcal{T}_r$ generada por los conjuntos $[a, b)$. ($\mathcal{T}_r$ se llama la *topología de Sorgenfrey* o *right sided topology*). Sean $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}_r$ las σ-álgebras de Borel generadas por $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_r$ y β la medida de Borel.

3. (a) Muestre que los conjuntos $[a, b)$ son cerrados en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_r)$ y que $\mathcal{T}_r$ es más fino que $\mathcal{T}$ (es decir que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_r$).
   (b) Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$, y defina $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $B := \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$.
   Determine $\overline{A}$ y $\overline{B}$ y muestre que $\overline{A}$ no es compacto, mientras $\overline{B}$ es compacto si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.
   (c) Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto en la topología $\mathcal{T}_r$. Muestre que existe una función inyectiva $K \to \mathbb{Q}$ y deduzca que K es contable.
   (Observa que por parte (c) para todo $x \in K$ existe un $y_x \in \mathbb{Q}$ tal que $y_x < x$ y $[y_x, x) \cap K = \emptyset$. En particular, $K \to \mathbb{Q},\ x \mapsto y_x$ es creciente.)

4. Considere $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_r$.
   (a) Muestre que $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_r$.
   (b) Muestre que β es outer regular, pero no inner regular para la topología $\mathcal{T}_r$.
   (c) Defina

$$\nu : \mathfrak{B}_r \to [0, \infty], \qquad \nu(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ es contable}, \\ \infty, & A \text{ no es contable}. \end{cases}$$

   Muestre que ν es una medida de Borel (es decir, que es una medida y que $\nu(K) < \infty$ para conjuntos compactos $K \subseteq \mathbb{R}$). Determine si ν es localmente finita, inner regular o outer regular.