Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración

Taller 10

Coordenadas polares y volumen de la bola en $\mathbb{R}^n$. Fecha de entrega: 24 de octubre de 2019

1. Las coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, son definidas recursivamente por $\Phi_n : D_n \to \mathbb{R}^n$ donde para $n \geq 2$
$$D_2 := [0, \infty) \times [-\pi, \pi], \qquad D_{n+1} := [0, \infty) \times [-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^{n-1},$$
y
$$\Phi_2(r, \vartheta_1) = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta_1 \\ r\sin\vartheta_1 \end{pmatrix}, \qquad \Phi_{n+1}(r, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n) := \begin{pmatrix} \cos(\vartheta_n)\cdot\Phi_n(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}) \\ r\sin\vartheta_n \end{pmatrix}.$$
Muestre para todo $n \geq 2$, $(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}) \in D_n$ y $\alpha \geq 0$:
   (a) $\|\Phi_n(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1})\|_2 = r, \quad \Phi_n(\alpha r, \vartheta_1, \dots \vartheta_{n-1}) = \alpha\Phi_n(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1})$.
   (b) $\Phi_n : D_n \to \mathbb{R}^n$ es sobreyectiva.
   (c) $\det \mathrm{D}\Phi_n(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}) = r^{n-1}\cos\vartheta_2\cdot\dots\cdot(\cos\vartheta_{n-1})^{n-2}$.
   (d) Defina $D_n' := (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2}$ y muestre que
$$\Phi_n : D_n' \to \Phi_n(D_n')$$
   es un C^∞-difeomorfismo y que existe un conjunto N_n con medida de Lebesgue 0 tal que $\Phi_{n+1}(D_n') = \mathbb{R}^n \setminus N_n$.

2. Sea $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ la norma euclidiana de un vector $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Muestre
$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\|x\|^2}\,\mathrm{d}^n x = \pi^{n/2}. \tag{$*$}$$

3. Sea $\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \Gamma(x) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$ Demuestre
   (a) Para $x > 0$ fijo, la función $f_x : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_x(t) := \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ es Lebesgue-integrable.
   (b) Γ es de clase C^∞ y para $x \in (0, \infty)$ y $k \in \mathbb{N}$ se tiene que
$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}(\ln(t))^k t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$
   (c) $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad (x > 0)$.
   (d) $\Gamma(n + 1) = n! \quad (n \in \mathbb{N})$.

4. Sea κ_n el volumen de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$. Muestre para $n \in \mathbb{N}$:
$$\kappa_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \begin{cases} \frac{2^{k+1}\pi^k}{1\cdot3\cdot\dots\cdot(2k+1)}, & \text{si } n = 2k+1 \text{ con } k \in \mathbb{N}_0, \\ \frac{\pi^k}{k!}, & \text{si } n = 2k \text{ con } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
Hint. Calcule la integral $\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\|z\|^2}\,\mathrm{d}z$ utilizando coordenadas polares y compare con ($*$).