Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración

Taller 9

Teorema de Fubini-Tonelli; Principio de Cavalieri. Fecha de entrega: 17 de octubre de 2019

---

1. Determine si las siguientes integrales existen y determine sus valores si posible:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y, \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x, \qquad \int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^2$$

para las funciones

(a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}, \quad x, y > 0,$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} 2^{2n} & \text{si } 2^{-n} < x \leq 2^{-n+1},\ 2^{-n} < y \leq 2^{-n+1}, \\ -2^{2n+1} & \text{si } 2^{-n-1} < x \leq 2^{-n},\ 2^{-n} < y \leq 2^{-n+1}, \\ 0 & \text{en otros casos,} \end{cases}$

donde λ^2 es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$ y las integrales iteradas son integrales en el sentido de Lebesgue.

2. Muestre que el plano $\{(x,y,0) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ tiene medida de Lebesgue 0.

3. (a) *Principio de Cavalieri.* Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y $K_{x_n} := \{(x_j)_{j=1}^{n-1} : (x_j)_{j=1}^{n} \in K\}$ para todo $x_n \in \mathbb{R}$. Muestre que

$$\beta^n(K) = \int_{\mathbb{R}} \beta^{n-1}(K_x)\,\mathrm{d}\lambda(x),$$

donde β^k es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^k$.

(b) Sea $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ compacto y $h > 0$. El *cono con base B y altura h* es definido por

$$C(B,h) := \{\big((1-\lambda)x, \lambda h\big) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : x \in B,\ 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Calcule el volumen $\beta^n(C(B,h))$ del cono $C(B,h)$.

4. Sea B el interior del elipse $4x^2 + y^2 = 4$. Calcule $\displaystyle\int_B y^2\,\mathrm{d}\lambda(x,y)$.