Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración — Taller 8

Convergencia. — Fecha de entrega: 10 de octubre de 2019

En los problemas 1, 2 y 3 suponemos que todas las funciones f y f_n son medibles.

1. (a) Si f_n converge casi uniformemente, entonces existe una función medible f, tal que $f_n \to f$ μ-casi siempre.
   (b) Supongamos que $f_n \to f$ en medida y que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy para convergencia casi uniforme. Muestre que $f_n \to f$ casi uniformemente.

2. (a) Suponga que $f_n \to f$ en medida. Muestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge μ-casi siempre a f.
   (b) Muestre que el teorema de Lebesgue sigue siendo válido si suponemos $f_n \to f$ en medida en vez de $f_n \to f$ μ-casi siempre.

3. Suponga que $\mu(X) < \infty$. Muestre que $f_n \to f$ en medida si y sólo si cada subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión que converge μ-casi siempre a f. Muestre que en general no es equivalente si $\mu(X) = \infty$.

4. De las siguientes sucesiones de funciones determine si convergen puntualmente, si convergen μ-casi siempre, si convergen en medida, si convergen casi uniforme, si convergen en $\mathscr{L}_p$. Si convergen, halle la función límite.

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n = \chi_{[n,\infty)},$$

$$g_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad g_n = \chi_{[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]}, \qquad \text{con } n = 2^k + j \ \ (j = 0, \dots, 2^k - 1),$$

$$h_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad h_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \le x \le 1/n, \\ 2n - n^2 x, & 1/n < x \le 2/n, \\ 0, & 2/n < x \le 1. \end{cases}$$