Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración

Taller 7

Teorema Lebesgue. Convergencia.

Fecha de entrega: 26 de septiembre de 2019

---

1. Muestre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{x}{n})^n}\,\mathrm{d}x = 1.$

2. Para $a > 0$ y $t > 0$ muestre para las integrales impropias de Riemann:
$$\int_0^\infty \frac{t}{t^2+x^2}\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-at}, \qquad \int_0^\infty \frac{x}{t^2+x^2}\sin(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-at}.$$
¿Existen las integrales como integrales de Lebesgue?

   Hint. Para la primera integral, muestre que la función
$$f_a(t) := \int_0^\infty \frac{t}{t^2+x^2}\cos(ax)\,\mathrm{d}x$$
satisface la ecuación diferencial $f_a'' = a^2 f_a$ derivando baja la integral y utlizando intergación por partes.

3. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida, $\alpha \in (0,\infty)$ y $f : X \to [0,\infty]$ una función medible con $\displaystyle\int_X f\,\mathrm{d}\mu := c \in (0,\infty)$. Calcule
$$\lim_{n\to\infty}\int_X n\log\left(1 + (f/n)^\alpha\right)\mathrm{d}\mu.$$
Hint. Si $\alpha \geq 1$, entonces el integrando es $\leq \alpha f$; aplique el lema de Fatou, si $\alpha \in (0,1)$.

4. *Lema de Riemann-Lebesgue.* Sea $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$ y $\widetilde{f}$ su transformada de Fourier. Muestre que $\lim_{t\to\infty}\widetilde{f}(t) = 0$.

   Hint. Muestre la afirmación primero para funciónes simples.

Ejercicios voluntarios

---

5. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f : I \to \mathbb{R}$ localmente Riemann-integrable (es decir, su restricción a cualquier compacto es Riemann-integrable). Demuestre que f es Lebesgue-integrable si y sólo si la integral impropia de Riemann de $|f|$ sobre I existe y que en este caso la integral de Riemann de f coincide con la integral de Lebesgue de f.

   Caso especial: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente Riemann-integrable. Entonces f es Lebesgue-integrable si y sólo si la integral impropia de Riemann
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x := \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$
existe y en este caso, $R\text{-}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}\lambda$, donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

6. Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Demuestre que f es Lebesgue integrable y calcule su integral.