Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración

Taller 4

Un conjunto no Lebesgue-medible;
funciones medibles.

Fecha de entrega: 05 de septiembre de 2019

1. Sea λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y $\mathfrak{M}$ la σ-álgebra de los subconjuntos λ-medibles de $\mathbb{R}$. Muestre: Si $M \in \mathfrak{M}$ y $\lambda(M) > 0$, existe un $N \in \mathfrak{M}$ tal que $N \subseteq M$ y
$$\lambda(N) > 0 \qquad \text{y} \qquad \lambda(M \setminus N) > 0.$$
(Se dice que *la medida de Lebesgue no tiene átomos.*)

2. (a) No existe ninguna medida μ sobre el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathbb{P}\mathbb{R})$ tal que μ es invariante bajo translación y $0 < \mu([0,1)) < \infty$.
   (b) Existe un conjunto $M \subseteq \mathbb{R}$ que no es Lebesgue-medible.
   (c) Demuestre que cada conjunto Lebesgue-medible A con $\lambda(A) > 0$ contiene un subconjunto no Lebesgue-medible.

   Hint para (a):
   - Define una relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}$ por $x \sim y :\iff x - y \in \mathbb{Q}$.
   - De cada clase escoja un representante en $[0,1)$. Sea M la unión de ellos.
   - Si μ es una medida como en (a), qué es $\mu(M) =$?

3. Sea $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = x$. Defina la secuencia de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ donde:
$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x-2) & \text{si } \frac{2}{3} \le x \le 1. \end{cases}$$
   (a) Demuestre que existe una función $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a G.[1]
   (b) *Ejercicio voluntario:* Pruebe que G es uniformemente continua y creciente. Si C es el conjunto de Cantor pruebe que G es constante en cada intervalo abierto de $[0,1] \setminus C$ y que $G(C) = [0,1]$.
   (c) Para cualquier subconjunto $A \subset [0,1]$, $G^{-1}(A)$ es Lebesgue-medible.
   (d) Considere $f(x) = x + G(x)$. Muestre que $\lambda(f(C)) = 1$. Usando el Ejericico 2 (c) tome V no Lebesgue-medible $V \subset f(C)$ y pruebe que $f^{-1}(V)$ es Lebesgue-medible pero no de Borel (note que f es estrictamente creciente).

4. Sea $(X, \mathfrak{M})$ un espacio medible.
   (a) Demuestre que $E(X, \mathfrak{A}) := \{\varphi : X \to \mathbb{R} : \varphi \text{ es función simple}\}$ es un espacio vectorial.
   (b) Suponga que $\mu(X) < \infty$. Demuestre que
$$I : E(X, \mathfrak{A}) \to \mathbb{R}, \quad I\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$
   es una función lineal y que existe una constante $C \ge 0$ tal que $|I(\varphi)| \le C\|\varphi\|_\infty$.

[1]Observe que si en vez de f_0 tomamos cualquier función g_0 acotada, la misma construcción converge uniformemente a la misma función G, que se llama la función de Cantor.