Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración

Taller 1

Anillos, álgebras,
contenidos, medidas.

Fecha de entrega: 15 de agosto de 2019

---

1. Sea $\{Q_{z,k} : k \in \mathbb{N}_0, z \in \mathbb{Z}^n\}$ el conjunto de los cubos elementales

$$Q_{z,k} := \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : z_j/2^k \leq x_j \leq (z_j+1)/2^k,\ j = 1, \ldots, n\right\}.$$

   Demuestre que cada conjunto abierto $\mathbb{R}^n$ es unión enumerable de cubos $Q_{z,k}$.

2. (a) Muestre que una σ-álgebra o es finita o no contable.
   (b) Un σ-anillo con infinitos elementos contiene una sucesión de subconjuntos disjuntos no vacíos.

3. Sea X un conjunto contable infinito y defina

$$\mathfrak{A} := \{A \subseteq X : A \text{ ó } X \setminus A \text{ es finito }\},$$

$$\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \qquad \mu(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ finito}, \\ 1, & A \text{ infinito}. \end{cases}$$

   (a) Demuestre que $\mathfrak{A}$ es un álgebra sobre X.
   (b) Demuestre que μ es un contenido, pero que no es una premedida.

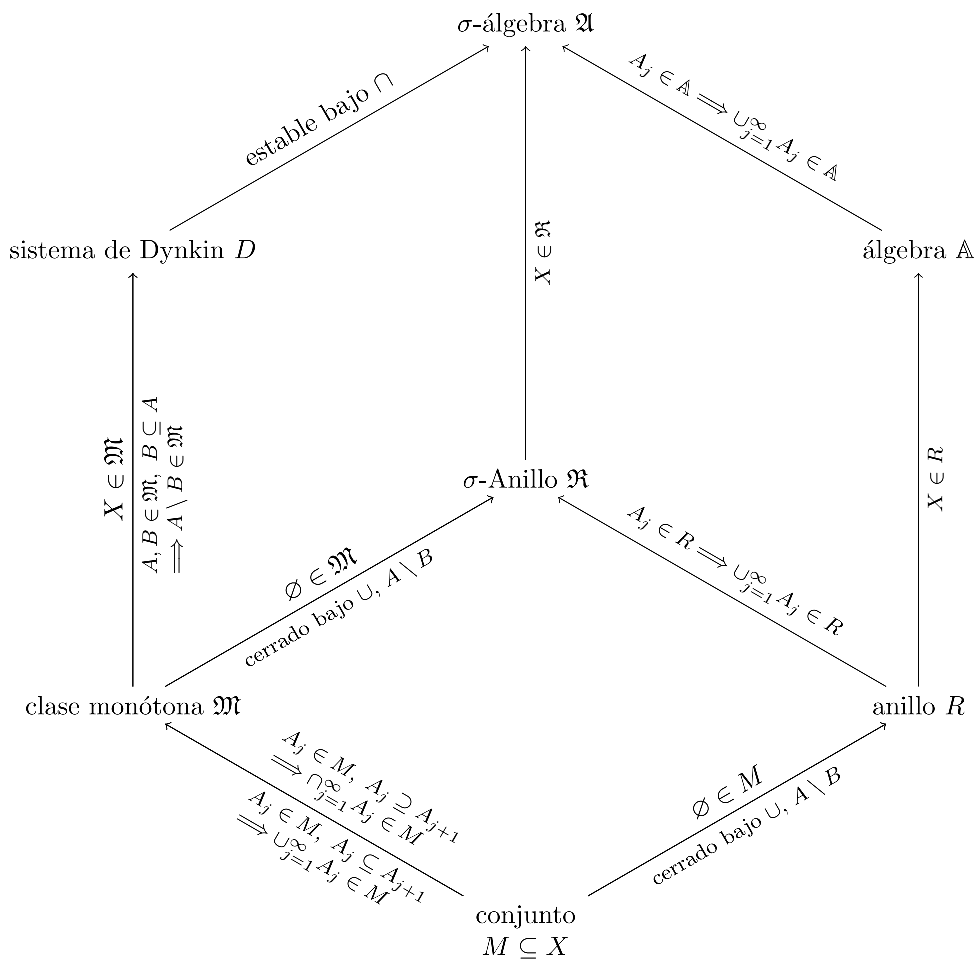
4. Para $a < b \in \mathbb{R}$ defina $[a,b)_{\mathbb{Q}} := [a,b) \cap \mathbb{Q}$.
   Sea $I = \{[a,b)_{\mathbb{Q}} \mid a, b \in \mathbb{Q},\, a < b\} \cup \{\emptyset\}$, $\mu([a,b)_{\mathbb{Q}}) = b - a$ para $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$, y $\mu(\emptyset) = 0$. Muestre:
   (i) I es un semianillo sobre $\mathbb{Q}$.
   (ii) μ es un contenido sobre I.
   (iii) μ no es una premedida sobre I.

Ejercicios voluntarios

---

5. ¿La intersección de seminallos es un semianillo?

6. Sean X, Y conjuntos, $f : X \to Y$ una función y H un semianillo sobre Y.
   ¿Es $\{f^{-1}(A) : A \in H\} \subseteq \mathbb{P}X$ un semianillo sobre X?



Gráfica adaptada de Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie, p. 25, y de https://de.wikipedia.org/wiki/Maßtheorie.