Tarea 4 - Medida e Integración

Rafael J. Mantilla 201124446 `rj.mantilla76@uniandes.edu.co`

Taller 4, Ejercicio 3. Sea $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_0(x) = x$. Defina la secuencia de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ donde:

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x-2) & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Demuestre que existe una función $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a G.[1]

(b) *Ejercicio voluntario:* Pruebe que G es uniformemente continua y creciente. Si C es el conjunto de Cantor pruebe que G es constante en cada intervalo abierto de $[0,1] \setminus C$ y que $G(C) = [0,1]$.

(c) Para cualquier subconjunto $A \subset [0,1]$, $G^{-1}(A)$ es Lebesgue-medible.

(d) Considere $f(x) = x + G(x)$. Muestre que $\lambda(f(C)) = 1$. Usando el Ejericico **??** **??** tome V no Lebesgue-medible $V \subset f(C)$ y pruebe que $f^{-1}(V)$ es Lebesgue-medible pero no de Borel (note que f es estrictamente creciente).

Esta tarea proviene de la imaginación de su querido monitor, que se inspiró al leer el artículo disponible en la URL:
https://warwick.ac.uk/fac/sci/maths/people/staff/oleg_zaboronski/analysisiii/cantor.pdf.
El artículo contiene muchas más propiedades que las descritas aquí, incluyendo conceptos que más adelante verán en medida. Se le recomienda fuertemente al lector que revise el artículo en su tiempo libre :).

Sea C el conjunto de Cantor, vamos a usar sin demostrar que:

$$[0,1] \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n} \right).$$

Esta definición es la construcción del conjunto de Cantor de Wikipedia.

Recuerde que para dos funciones acotadas $f, g : X \to R$,

$$\|f - g\|_\infty = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\}.$$

Una inducción muestra que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(0) = 0, \qquad f_n(1) = 1.$$

(a) Primero mostraremos que $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$ para todo $n \geq 2$.

- Si $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$

$$\begin{aligned}|f_{n+1}(x) - f_n(x)| &\leq \left|\frac{1}{2}f_n(3x) - \frac{1}{2}f_{n-1}(3x)\right| = \frac{1}{2}\left|f_n(3x) - f_{n-1}(3x)\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty.\end{aligned}$$

- Si $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $f_{n+1}(x) = f_n(x) = \frac{1}{2}$.
- Si $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$:

$$\begin{aligned}|f_{n+1}(x) - f_n(x)| &\leq \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_n(3x-2) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}f_{n-1}(3x-2)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|f_n(3x-2) - f_{n-1}(3x-2)\right| \leq \frac{1}{2}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty.\end{aligned}$$

En cualquier caso $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$. Note que f_0 y f_1 tienen su imagen en el intervalo $[0, 1]$, entonces $\|f_1 - f_0\|_\infty \leq 1$. Por inducción obtenemos

$$\begin{aligned}\text{para todo } n \in \mathbb{N}: &\qquad \|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}\|f_1 - f_0\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \\ \text{y para todo } k, n \in \mathbb{N}: &\qquad \|f_{n+k} - f_n\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{k}\|f_{n+i} - f_{n+i-1}\| \leq \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^{n+i-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

Por ende $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de funciones por lo que tienen un límite en convergencia uniforme (o se puede probar puntualmente y la cota prueba que esto es uniforme).

(b) Probemos lo pedido por partes:

- *G es uniformemente continua*: Basta probar que f_n es continua para todo $n \in N$ ya que el límite uniforme de funciones continuas es continuo. Claramente, f_0 es continuo, como hipótesis de inducción asuma que f_n es continuo para un $n \in \mathbb{N}$.
  Las funciones $\frac{1}{2}f_n(3x)$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_n(3x-2)$ son claramente continuas. Entonces basta ver que f_{n+1} es continuo en $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$. Note que

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f_{n+1}(x) = \lim_{x\to\frac{2}{3}^-} f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}.$$

  Ahora $f_0(0) = 0$ y $f_{k+1}(0) = \frac{1}{2}f_k(0)$, por lo que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_k(0) = 0$. Análogamente $f_0(1) = 1$ y $f_{k+1}(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_k(1)$ entonces $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_k(1) = 1$. Usando la continuidad de f_n:

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^-} f_{n+1}(x) = \lim_{x\to\frac{1}{3}^-} \frac{1}{2}f_n(3x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{2}f_n(x) = \frac{1}{2}f_n(1) = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}^+} f_{n+1}(x) = \lim_{x\to\frac{2}{3}^+} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_n(3x-2) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_n(0) = \frac{1}{2}.$$

  Entonces f_n es continuo para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que G debe ser continuo. G es una función continua en un compacto y por ende G es uniformemente continua. Un lector ávido podría observar además que G es Hölder continuo con $\alpha = 2/3$:).

- *G es creciente*: Al igual que el paso anterior si probamos que f_n es creciente para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces G debe ser creciente. Note que f_0 es creciente y $f_0([0,1]) \subset [0,1]$. Tome como hipótesis de inducción f_n es creciente y $f_n([0,1]) \subset [0,1]$. Se sigue inmediatamente de la definición de f_{n+1} que sus restricciones a los conjuntos $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,1]$ son crecientes. Como f_{n+1} en continua (en particular es continua en los puntos $1/3$ y $2/3$), es creciente en $[0,1]$.

  Ahora presentamos una prueba de que si f_n es creciente para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces G es creciente. Recuerde que $f_n \to G$ en $\|\cdot\|_\infty$ y f_n creciente, entonces tome $x, y \in \mathbb{R}$, $y \leq x$, suponga por contradicción que $G(y) > G(x)$, entonces tome $0 < \epsilon < \frac{1}{2}(G(y) - G(x))$, tome f_n tal que $\|f_n - G\|_\infty < \epsilon$

  $$f_n(y) - f_n(x) = f_n(y) - G(y) + G(y) - G(x) + G(x) - f_n(x) \geq -\epsilon + G(y) - G(x) - \epsilon > 0.$$

  Lo cual contradice que f_n es creciente, entonces G debe ser creciente.

- *G es constante en cada intervalo abierto de* $[0,1] \setminus C$: Recuerde que

  $$[0,1] \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n} \right).$$

  Sea $n \geq 1$ y $0 \leq k \leq 3^{n-1} - 1$. Queremos probar que $f_m\left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n}\right)$ es constante para $m \geq n$. Hagamos esto por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$.

  - Para $n = 1$, el único k posible es $k = 0$. Claramente $f_m\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \{\frac{1}{2}\}$ para todo $m \geq n$.
  - Suponga que eso es cierto para cada valor hasta n, probemos la afirmación para $n+1$. Tome $0 \leq k \leq 3^n - 1$, $m \geq n+1$.
    - Suponga que $0 \leq k \leq 3^{n-1} - 1$, claramente $m - 1 \geq n$ y

      $$f_m(x) = f_{m-1}(x) \quad \text{para } x \in \left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}} \right).$$

      y f_{m-1} es constante en este intervalo por hipótesis de inducción.
    - Si $3^{n-1} \leq k \leq 2 \cdot 3^{n-1} - 1$, entonces

      $$\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}} \right) \subset \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right),$$

      y aquí f_m es claramente constante por la definición de f_m y $m > 0$.
    - Si $2 \cdot 3^{n-1} \leq k \leq 3^n - 1$, como $m - 1 \geq n$,

      $$f_m(x) = f_{m-1}(x) \quad \text{para } x \in \left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}} \right)$$

      y f_{m-1} es constante en este intervalo por hipótesis de inducción.

  Por ende para todo $m \geq n \geq 1$ y $0 \leq k \leq 3^{n-1} - 1$, la función f_m es constante en $\left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n}\right)$. Note que para $n, k \in \mathbb{N}$ cualquier intervalo de la forma

  $$\left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n} \right)$$

dado $n' < n$ es disjunto de los intervalos $\left(\frac{3k'+1}{3^{n'}}, \frac{3k'+2}{3^{n'}}\right)$ o está contenido en ellos. Entonces el conjunto de Cantor se puede escribir como unión disjunta de ese tipo de intervalos. Para una definición más precisa el lector podría definir

$$K_n := \{k \in \mathbb{N} \mid k < 3^{n-1} \wedge \text{k no tiene el número 1 en su expresión en base 3}\}.$$

Entonces podría demostrar que

$$[0,1] \setminus C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k \in K_n} \left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n}\right).$$

Por ende para cualquier intervalo abierto $(a,b) \in [0,1] \setminus C$ existe un n, k tal que

$$(a,b) \subset \left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n}\right).$$

Entonces para todo $m \geq n$, $f_m|_{(a,b)}$ es constante. Como G es el límite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, también $G|_{(a,b)}$ es constante.

- $G(C) = [0,1]$: De ahora en adelante describimos $[0,1] \setminus C = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, donde U_n es un intervalo abierto y $G(U_n)$ es constante. Para $x \in [0,1]$ considere

$$U := G^{-1}(x) \cap \left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right).$$

Vamos a probar que esto es abierto. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $G(U_n)$ es constante. Por lo tanto $U_n \subset G^{-1}(x)$ o $U_n \cap G^{-1}(x) = \emptyset$. Entonces

$$U = \bigsqcup \{U_n \mid n \in \mathbb{N},\, G(U_n) = x\},$$

lo cual es una unión de abiertos como $G^{-1}(x)$ es cerrado. $G^{-1}(\{x\}) \setminus U$ es no vacío porque U no puede ser cerrado. Entonces

$$G^{-1}(\{x\}) \setminus ([0,1] \setminus C) = G^{-1}(\{x\}) \setminus U \neq \emptyset.$$

Entonces $x \in G(C)$ para cualquier $x \in [0,1]$.

(c) Sea $A \subset [0,1]$, considere $G^{-1}(A) \setminus C$. Por exactamente el mismo argumento que usamos en el punto (b) cuando calculamos $G^{-1}(\{x\})$, tenemos

$$G^{-1}(A) \setminus C = \bigsqcup \{U_n \mid n \in \mathbb{N},\, G(U_n) \in A\}.$$

Por ende $G^{-1}(A) \setminus C$ es Boreliano, al ser unión contable de abiertos, además $\lambda(C) = 0$ entonces $G^{-1}(A) \cap C$ es despreciable y por ende es Lebesgue medible.

$$G^{-1}(A) = \left(G^{-1}(A) \setminus C\right) \cup \left(G^{-1}(A) \cap C\right).$$

Por ende $G^{-1}(A)$ es Lebesgue medible al ser unión de Lebesgue medibles.

(d) La función f es suma de creciente con estrictamente creciente por ende es estrictamente creciente y continua. Entonces f^{-1} existe, es creciente y por ende medible. Por lo tanto

$f(E)$ Boreliano $\Leftrightarrow$ E Boreliano. Para $n \in \mathbb{N}$, $G\left(U_n\right) = \{c\}$, para $c \in \mathbb{R}$. Entonces la restricción $f|_{U_n} : U_n \to \mathbb{R}$ cumple que $f|_{U_n}(x) = x+c$. Como λ es invariante bajo traslación

$$\lambda\left(f\left(U_n\right)\right) = \lambda\left(U_n\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\lambda\left(f([0,1] \setminus C)\right) &= \lambda\left(f\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right)\right) = \lambda\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f(U_n)\right)\\ &= \lambda\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) = \lambda([0,1] \setminus C) = 1.\end{aligned}$$

Ahora $\lambda(f([0,1])) = \lambda[0,2] = 2$, y

$$\lambda(f([0,1])) = \lambda(f(C)) + \lambda(f([0,1] \setminus C)).$$

Entonces $\lambda(f(C)) = 1$. Por ende existe $V \subset f(C)$ tal que V no es medible, $f^{-1}(V) \subset C$. Entonces $f^{-1}(V)$ es Lebesgue medible y $\lambda(f^{-1}(V)) = 0$. Pero V no puede ser Boreliano (ni siquiera es de Lebesgue), entonces $f^{-1}(V)$ no es Boreliano.