Universidad de los Andes
MATE-4220

Medida e Integración

Taller 13

Medidas complejas; teorema de Radon-Nikodym.

Fecha de entrega: 11 de mayo 2018

---

1. Sea $(X, \mathfrak{A})$ un espacio medible y sea μ una medida con signo sobre $\mathfrak{A}$. Demuestre que para todo $A \in \mathfrak{A}$ existe un $B \in \mathfrak{A}$ tal que $B \subseteq A$, B es μ-positivo y $\mu(B) \geq \mu(A)$.

2. Sea $(X, \mathfrak{A})$ un espacio medible, sean μ y ν medidas con signo sobre $\mathfrak{A}$.

   (a) Demuestre que para todo a $A \in \mathfrak{A}$ lo siguiente es equivalente:

   (i) A es μ-nulo.
   (ii) A es μ^+-nulo y μ^--nulo.
   (iii) A es $|\mu|$-nulo.

   (b) Demuestre que lo siguiente es equivalente:

   (i) $\mu \perp \nu$.
   (ii) $\mu^+ \perp \nu$ y $\mu^- \perp \nu$.
   (iii) $|\mu| \perp \nu$.
   (iv) $|\mu| \perp |\nu|$.

3. Sea $(X, \mathfrak{A})$ un espacio medible y sean μ y ν medidas con signo y sea $\nu = \varrho + \sigma$ la descomposición de ν de Lebesgue con respecto a μ.

   Demuestre que $|\nu| = |\varrho| + |\sigma|$ es la descomposición de $|\nu|$.

4. Sean μ, ν, ω medidas σ-finitas sobre la σ-álgebra $\mathfrak{A}$ con $\mu \ll \nu \ll \omega$. Muestre que $\mu \ll \omega$ y que

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\omega} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}.$$