

Medida e Integración

Taller 12

Medidas complejas; teorema de Radon-Nikodym.

Fecha de entrega: 04 de mayo 2018

1. Sea μ una medida con signo sobre la σ -álgebra \mathfrak{A} y sea $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$. Demuestre

$$(i) \quad A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \quad \implies \quad \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n),$$

$$(ii) \quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \quad \implies \quad \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

2. Sean μ, ν medidas complejas sobre una σ -álgebra \mathfrak{A} . Muestre que $\nu \ll \mu$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|\nu(A)| < \varepsilon$ si $A \in \mathfrak{A}$ con $|\mu|(A) < \delta$.

3. Sea $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ una medida compleja.

(a) Muestre que existe una función $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $|g| = 1$ y $\mu = g \odot |\mu|$.

(b) Para $f \in \mathcal{L}_1(X, \mu)$ muestre que $f \in \mathcal{L}_1(X, |\mu|)$ y que

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d|\mu|,$$

donde

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f \, d\operatorname{Re}(\mu)^+ - \int_X f \, d\operatorname{Re}(\mu)^- + i \int_X f \, d\operatorname{Im}(\mu)^+ + i \int_X f \, d\operatorname{Im}(\mu)^-.$$

4. Sea \mathfrak{B} la σ -álgebra de Borel sobre \mathbb{R} y β la medida de Borel-Lebesgue sobre \mathfrak{B} . Sea μ una medida de Borel sobre \mathbb{R} tal que la función de distribución

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} -\mu((x, 0]), & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \mu((0, x]), & x > 0 \end{cases}$$

es derivable y φ' es continua. Muestre que $\varphi'(x) = \frac{d\mu}{d\beta}(x)$ es la derivada de Radon-Nikodym.

• Para una medida compleja μ sobre una σ -álgebra \mathfrak{A} se define la *variación total* $|\mu|$ como

$$|\mu|(A) := \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mu(A_n)| : (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}, \text{ disjuntos dos a dos, } A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right\}$$

• Si μ es una medida, ν es una medida compleja con $\nu \ll \mu$, entonces existe una función f tal que $\nu = f \odot \mu$. Esta función se llama la *derivada de Radon-Nikodym* de ν con respecto a μ .