

# Medida e Integración

## Taller 9

Teorema de Fubini-Tonelli; Principio de Cavalieri.

Fecha de entrega: 06 de abril 2018

---

1. Determine si las siguientes integrales existen y determine sus valores si posible:

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy, \quad \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx, \quad \int_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) d\lambda^2$$

para las funciones

(a)  $f(x, y) = \frac{x - y}{(x + y)^3}, \quad x, y > 0,$

(b)  $f(x, y) = \begin{cases} 2^{2n} & \text{si } 2^{-n} < x \leq 2^{-n+1}, 2^{-n} < y \leq 2^{-n+1}, \\ -2^{2n+1} & \text{si } 2^{-n-1} < x \leq 2^{-n}, 2^{-n} < y \leq 2^{-n+1}, \\ 0 & \text{en otros casos,} \end{cases}$

donde  $\lambda^2$  es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^2$  y las integrales iteradas son integrales en el sentido de Lebesgue.

2. Muestre que el plano  $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$  tiene medida de Lebesgue 0.
3. (a) *Principio de Cavalieri.* Sea  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  compacto y  $K_{x_n} := \{(x_j)_{j=1}^{n-1} : (x_j)_{j=1}^n \in K\}$  para todo  $x_n \in \mathbb{R}$ . Muestre que

$$\beta^n(K) = \int_{\mathbb{R}} \beta^{n-1}(K_x) d\lambda(x),$$

donde  $\beta^k$  es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^k$ .

- (b) Sea  $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  compacto y  $h > 0$ . El cono con base  $B$  y altura  $h$  es definido por

$$C(B, h) := \{((1 - \lambda)x, \lambda h) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : x \in B, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Calcule el volumen  $\beta^n(C(B, h))$  del cono  $C(B, h)$ .

4. Sea  $B$  el interior del elipse  $4x^2 + y^2 = 4$ . Calcule  $\int_B y^2 d\lambda(x, y)$ .