Universidad de los Andes
MATE-4220

Medida e Integración

Taller 7

Teorema Lebesgue. Convergencia. Fecha de entrega: 16 de marzo de 2018

---

1. (a) Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Demuestre que f es Lebesgue integrable y calcule su integral.

   (b) Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida, $\alpha \in (0, \infty)$ y $f : X \to [0, \infty]$ una función medible con $\displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\mu := c \in (0, \infty)$. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\left(1 + (f/n)^\alpha\right) \mathrm{d}\mu.$$

   Hint. Si $\alpha \geq 1$, entonces el integrando es $\leq \alpha f$; aplique el lema de Fatou, si $\alpha \in (0, 1)$.

Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f_n, f : X \to \mathbb{K}$ funciones medibles. Se dice que f_n *converge en medida a* f si para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Se dice que f_n *converge μ-casi siempre uniformemente a* f si existe un conjunto $A \in \mathfrak{A}$ tal que $\mu(X \setminus A) = 0$ y $f_n \to f$ uniformemente en A.
Se dice que f_n *converge casi uniformemente* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $A \in \mathfrak{A}$ tal que $\mu(X \setminus A) < \varepsilon$ y $(f_n|_A)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.

En los problemas 2 y 3 suponemos que todas las funciones f y f_n son medibles.

2. (a) Suponga que $f_n \to f$ en medida. Muestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge μ-casi siempre a f.

   (b) Muestre que el teorema de Lebesgue sigue siendo válido si suponemos $f_n \to f$ en medida en vez de $f_n \to f$ μ-casi siempre.

3. Suponga que $\mu(X) < \infty$. Muestre que $f_n \to f$ en medida si y sólo si cada subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión que converge μ-casi siempre a f. Muestre que en general no es equivalente si $\mu(X) = \infty$.

4. De las siguientes sucesiones de funciones determine si convergen puntualmente, si convergen μ-casi siempre, si convergen en medida, si convergen casi uniforme, si convergen en $\mathscr{L}_p$. Si convergen, halle la función límite.

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n = \chi_{[n,\infty)},$$

$$g_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad g_n = \chi_{[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]}, \qquad \text{con } n = 2^k + j \ \ (j = 0, \dots, 2^k - 1),$$

$$h_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad h_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ 2n - n^2 x, & 1/n < x \leq 2/n, \\ 0, & 2/n < x \leq 1. \end{cases}$$