Universidad de los Andes
MATE-4220

Medida e Integración

Taller 5

Funciones simples; integración. Fecha de entrega: 02 de marzo 2018

---

1. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida, $(X, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ su completación y $\varphi : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathfrak{A}_0$-simple. Muestre que existen funciones ψ_1, ψ_2, $\mathfrak{A}$-simples, tales que $\psi_1 \leq \varphi \leq \psi_2$ y $\mu(\{\psi_1 \neq \psi_2\}) = 0$. Muestre que para tales funciones $\int_X \psi_1 \, \mathrm{d}\mu = \int_X \psi_2 \, \mathrm{d}\mu$ si por lo menos una de las integrales existe.

2. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Para $B \in \mathfrak{A}$, $B \neq \emptyset$ definimos $\mathfrak{A}_B := \{A \cap B : A \in \mathfrak{A}\}$ y $\mu_B := \mu|_{\mathfrak{A}_B}$. Sabemos que $(B, \mathfrak{A}_B, \mu_B)$ es un espacio de medida.

   (a) Muestre que $f|_B$ es $\mathfrak{A}_B$-medible si y solo si $\chi_B \cdot f$ es $\mathfrak{A}$-medible.

   Suponemos para el resto del ejercicio que $\chi_B \cdot f$ es medible.

   (b) Si $f \geq 0$, muestre que $\displaystyle\int_B f|_B \, \mathrm{d}\mu_B = \int_X \chi_B \cdot f \, \mathrm{d}\mu.$ $(*)$

   (c) Muestre: $\chi_B \cdot f \in \mathscr{L}_1(X, \mathfrak{A}, \mu) \iff f|_B \in \mathscr{L}_1(B, \mathfrak{A}_B, \mu_B)$. En este caso, $(*)$ vale.

   (d) Sea $f : X \to [0, \infty]$ $\mathfrak{A}$-medible. Muestre: Si $\displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\mu < \infty$, entonces $f(x) < \infty$ μ-casi siempre.

3. Sea $(X, \mathfrak{A})$ un espacio medible y $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible.

   (a) Demuestre que existe $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E^+(X, \mathfrak{A})$ tal que

   $$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq f$$

   y $\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

   (b) Suponga adicionalmente que f es acotada. Demuestre que la sucesión $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E^+(X, \mathfrak{A})$ se puede escoger tal que $s_n \to f$ uniformemente.

4. Sea $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ como en el problema 1 del taller 3. Determine todas las funciones medibles $f : X \to [0, \infty]$ y su integral $\displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\mu$.