

Medida e Integración

Taller 4

Un conjunto no Lebesgue-medible;
funciones medibles.

Fecha de entrega: 23 de febrero de 2018

1. Sea λ la medida de Lebesgue en \mathbb{R} y \mathfrak{M} la σ -álgebra de los subconjuntos λ -medibles de \mathbb{R} . Muestre: Si $M \in \mathfrak{M}$ y $\lambda(M) > 0$, existe un $N \in \mathfrak{M}$ tal que $N \subseteq M$ y

$$\lambda(N) > 0 \quad \text{y} \quad \lambda(M \setminus N) > 0.$$

(Se dice que *la medida de Lebesgue no tiene átomos*.)

2. (a) No existe ninguna medida μ sobre el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathbb{P}\mathbb{R})$ tal que μ es invariante bajo translación y $0 < \mu([0, 1]) < \infty$.
(b) Existe un conjunto $M \subseteq \mathbb{R}$ que no es Lebesgue-medible.
(c) Demuestre que cada conjunto Lebesgue-medible A con $\lambda(A) > 0$ contiene un subconjunto no Lebesgue-medible.

Hint para (a):

- Defina una relación de equivalencia sobre \mathbb{R} por $x \sim y : \iff x - y \in \mathbb{Q}$.
- De cada clase escoja un representante en $[0, 1)$. Sea M la unión de ellos.
- Si μ es una medida como en (a), qué es $\mu(M) = ?$

3. Sea $f_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = x$. Defina la secuencia de funciones $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donde:

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}f_n(3x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_n(3x - 2) & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- (a) Demuestre que existe una función $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a G .¹
(b) *Ejercicio voluntario:* Pruebe que G es uniformemente continua y creciente. Si C es el conjunto de Cantor pruebe que G es constante en cada intervalo abierto de $[0, 1] \setminus C$ y que $G(C) = [0, 1]$.
(c) Para cualquier subconjunto $A \subset [0, 1]$, $G^{-1}(A)$ es Lebesgue-medible.
(d) Considere $f(x) = x + G(x)$. Muestre que $\lambda(f(C)) = 1$. Usando el Ejercicio 4.2 (c) tome V no Lebesgue-medible $V \subset f(C)$ y pruebe que $f^{-1}(V)$ es Lebesgue-medible pero no de Borel (note que f es estrictamente creciente).
4. Sea (X, \mathfrak{M}, μ) como en el problema 1 del taller 3. Determine todas las funciones medibles $f : X \rightarrow [0, \infty]$ y su integral $\int_X f d\mu$.

¹Observe que si en vez de f_0 tomamos cualquier función g_0 acotada, la misma construcción converge uniformemente a la misma función G , que se llama la función de Cantor.