Universidad de los Andes
MATE-4220

Medida e Integración

Taller 1

Anillos, álgebras,
contenidos, medidas.

Fecha de entrega: 02 de febrero de 2018

---

1. Sea $\{Q_{z,k} \,:\, k \in \mathbb{N}_0, z \in \mathbb{Z}^n\}$ el conjunto de los cubos elementales
$$Q_{z,k} := \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, z_j/2^k \leq x_j \leq (z_j+1)/2^k,\ j = 1, \ldots, n\right\}.$$
Demuestre que cada conjunto abierto $\mathbb{R}^n$ es unión enumerable de cubos $Q_{z,k}$.

2. (a) Muestre que una σ-álgebra o es finita o no contable.
   (b) Un σ-anillo con infinitos elementos contiene una sucesión de subconjuntos disjuntos no vacíos.

3. Sea X un conjunto contable infinito y defina
$$\mathfrak{A} := \{A \subseteq X : A \text{ ó } X \setminus A \text{ es finito }\},$$
$$\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \qquad \mu(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ finito}, \\ 1, & A \text{ infinito}. \end{cases}$$
   (a) Demuestre que $\mathfrak{A}$ es un álgebra sobre X.
   (b) Demuestre que μ es un contenido, pero que no es una premedida.

4. Para $a < b \in \mathbb{R}$ defina $[a,b)_{\mathbb{Q}} := [a,b) \cap \mathbb{Q}$.
Sea $I = \{[a,b)_{\mathbb{Q}} \mid a, b \in \mathbb{Q},\, a < b\} \cup \{\emptyset\}$, $\mu([a,b)_{\mathbb{Q}}) = b - a$ para $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$, y $\mu(\emptyset) = 0$. Muestre:
   (i) I es un semianillo sobre $\mathbb{Q}$.
   (ii) μ es un contenido sobre I.
   (iii) μ no es una premedida sobre I.

Definiciones & teoremas

Sea X un conjunto. Entonces $(\mathbb{P}X, \Delta, \cap)$ es un anillo.

Definición 1. (i) $R \subseteq \mathbb{P}X$ es un anillo sobre X si es un subanillo de $\mathbb{P}X$.

(ii) $R \subseteq \mathbb{P}X$ es un σ-anillo sobre X si es un anillo sobre $\mathbb{P}X$ y si

$$(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq R \qquad \Longrightarrow \qquad \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in R.$$

(iii) $\mathfrak{A} \subseteq \mathbb{P}X$ es un álgebra sobre X si es un anillo sobre $\mathbb{P}X$ y $X \in \mathfrak{A}$.

(iv) $\mathfrak{A} \subseteq \mathbb{P}X$ es una σ-álgebra sobre X si es un σ-anillo sobre $\mathbb{P}X$ y $X \in \mathfrak{A}$.

Definición 2. $H \subseteq \mathbb{P}X$ es un semianillo sobre X si $\emptyset \in H$ y para todo $A, B \in H$ existen $C_1, \dots, C_n \in H$, disjuntos entre si, tal que

$$A \cap B \in H, \quad y \quad A \setminus B = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_n.$$

Theorem 3. *Para $R \subseteq \mathbb{P}X$ lo siguiente es equivalente:*

(i) *R es un anillo.*

(ii) $\emptyset \in R \quad y \quad A, B \in R \Longrightarrow A\Delta B \in R$ *y* $A \cap B \in R$.

(iii) $\emptyset \in R \quad y \quad A, B \in R \Longrightarrow A\Delta B \in R$ *y* $A \cup B \in R$.

(iv) $\emptyset \in R \quad y \quad A, B \in R \Longrightarrow A \cup B \in R$ *y* $A \setminus B \in R$.

Theorem 4. *Para $\mathfrak{A} \subseteq \mathbb{P}X$ lo siguiente es equivalente:*

(i) *$\mathfrak{A}$ es un álgebra.*

(ii) $X \in \mathfrak{A} \quad y \quad A, B \in \mathfrak{A} \Longrightarrow X \setminus A \in \mathfrak{A}$ *y* $A \cap B \in \mathfrak{A}$.

(iii) $X \in \mathfrak{A} \quad y \quad A, B \in \mathfrak{A} \Longrightarrow X \setminus A \in \mathfrak{A}$ *y* $A \cup B \in \mathfrak{A}$.

Definición 5. Sea $H \subset \mathbb{P}X$ un semianillo y $\mu : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(i) μ es un contenido sobre H si

  (a) $\mu(\emptyset) = 0$,

  (b) *positividad:* $\mu(A) \geq 0$ para todo $A \in H$.

  (c) *aditividad:* para todo $A_1, \dots, A_n \in H$, disjuntos entre si con $\bigsqcup_{j=1}^n A_j \in H$

$$\mu(\bigsqcup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j).$$

(ii) μ es una premedida sobre H si

  (a) $\mu(\emptyset) = 0$,

  (b) *positividad:* $\mu(A) \geq 0$ para todo $A \in H$.

(c) *aditividad:* para todo $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset H$, disjuntos entre si con $\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j \in H$

$$\mu(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

(iii) μ es una medida sobre H si H es una σ-algebra.