def: $\varphi : H \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal si $\forall x, y \in H$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \lambda \varphi(y)$.

def: sea φ un funcional lineal,

$$\|\varphi\| = \sup\{ |\varphi(x)| : x \in H, \|x\| \leq 1 \}$$

φ es funcional lineal acotado si φ es funcional lineal y $\|\varphi\| < \infty$

teorema (Riesz - Frechét): Para cada $\varphi : H \to \mathbb{K}$ funcional lineal acotado, $\exists!\, z \in H$ tq $\forall x \in H$,

$$\varphi(x) = \langle x, z \rangle$$

y se tiene que $\|\varphi\| = \|z\|$

Ej: sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$, μ σ finita, ent $L_2(X) = \mathcal{L}_2(X) / \eta$ es un espacio de Hilbert, con producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} \, d\mu$$

teorema: sean μ, ν medidas σ finitas. ent $\exists\, f \geq 0$, $N \in \mathcal{A}$ tq $\forall A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = \nu(A \cap N) + \int_A f \, d\mu$, $\mu(N) = 0$.

dem:

caso 1: μ, ν son finitas. sea $\alpha = \mu + \nu$ es una medida.

sea $\varphi : L_2(X, \alpha) \to \mathbb{C}$, $\varphi(h) = \int h \, d\nu$ es un funcional lineal acotado, lo anterior, pues

$$\left| \int h \, d\nu \right| = \left| \int_X h \cdot 1 \, d\nu \right| = |\langle h, 1 \rangle| \leq \|1\|_{L_2} \cdot \|h\|_{L_2}$$

$= \sqrt{\nu(X)} \cdot \|h\|_2$. ent φ es f. lineal acotado con

$$\|\varphi\| \leq \sqrt{\nu(X)}$$

$\implies \exists g \in L_2(X,\alpha)$ tq $\forall f \in L_2(X,\alpha)$:

$$\int f\,d\nu \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def.}}}{=} \varphi(f) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Riesz - F.}}}{=} \int fg\,d\alpha$$

En particular, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\int \chi_A\,d\nu = \int \chi_A\, g\,d\alpha$

$\implies g \geq 0 \quad \alpha$ ae

(Tome $A = \{g^{-1}((-\infty, 0))\}$)

Sea $N = \{x \in X : g(x) \geq 1\} \in \mathcal{A}$

$$\implies \nu(N) = \int \chi_N\,d\nu = \int \chi_N\, g\,d\alpha \geq \alpha(N)$$
$$= \mu(N) + \nu(N)$$

$\implies \mu(N) = 0$

Ahora, sea $f := \dfrac{g}{1-g}\chi_{X\setminus N} \geq 0$

sea $A \in \mathcal{A}$, ent $\int_A f\,d\mu = \int_X \dfrac{g}{1-g}\chi_{X\setminus N}\,\chi_A\,d\mu$

$$\implies \int_A f\,d\mu = \int_X g\,\chi_A\,\chi_{X\setminus N}\underbrace{\frac{1}{1-g}\,d\mu}_{d\mu = (1-g)\,d\alpha}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \mu = \alpha - \nu \\ = \alpha - g\alpha \\ = (1-g)\,d\alpha \end{array} \right.$

$$= \int_X g\,\chi_A\,\chi_{X\setminus N}\,d\alpha$$

$$= \int_X \chi_A\,\chi_{X\setminus N}\,d\nu = \nu(A \cap (X\setminus N))$$

$$= \nu(A) - \nu(A \cap N)$$

Caso 2: Si μ y ν no son finitas, pero son σ finitas, ent

$\exists X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ tq $\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j = X$, $\mu(X_n) < \infty$, $\nu(X_n) < \infty$

En este caso, aplique caso 1 a los conjuntos X_j y en este caso obtenemos conjuntos N_n tq $\mu(N_n)=0$ y f_n tq $\forall A \in \mathcal{A}$, $\nu(A \cap X_n) = \nu(A \cap X_n \cap N) + \int_{X_n \cap A} f_n \, d\mu$.

sea $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, ent $N \in \mathcal{A}$ y $\mu(N) = 0$

Note $f_{n+1}\big|_{X_n} = f_n$ μ ae y defina

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \in X_n \\ 0 & \text{si } x \notin X_n \end{cases}$$

sea $f = \limsup_{n\to\infty} \tilde{f}_n$.

teorema de descomposición de Lebesgue: sean μ, ν σ-finitas. Ent $\exists!$ medidas σ, ρ tq

$$\sigma + \rho = \nu$$
$$\sigma \perp \mu, \quad \sigma \perp \rho$$
$$\rho \ll \mu$$

dem: sean f, N como en el teorema anterior, entonces defina

$$\sigma(A) = \nu(A \cap N)$$
$$\rho(A) = \int_A f \, d\mu = (f \odot \mu)(A)$$

unicidad: supongamos que $\exists\, \sigma', \rho'$ medidas que satisfacen lo que queremos y N' tq $\mu'(N') = 0$, $\sigma'(X \setminus N') = 0$ con $\nu = \rho' + \sigma'$, $\rho' \ll \mu$.

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \rho(A) = \rho(A \setminus (N \cup N')) + \underbrace{\rho(A \cap (N \cup N'))}_{\leq \mu(A \cap (N \cup N')) = 0}$$

$$= \nu(A \setminus (N \cup N')) - \underbrace{\sigma(A \setminus (N \cup N'))}_{= 0 \ (\sigma \text{ se anula en } X \setminus N)}$$

$$= \nu(A \setminus (N \cup N'))$$

teorema (Radon - Nikodym): sean μ, ν σ-finitas ent

$\nu \ll \mu \iff \exists f \geq 0$ tq $\nu = f \odot \mu$. Es decir

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

En particular, $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$. $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ y se denomina la derivada de Radon - Nikodym de ν con respecto a μ.

11. 11. 2014

ejemplos:

i. sea β la medida de Borel en $\mathbb{R}$, $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\mu(A) := \begin{cases} 1 & 0 \in A \\ 0 & 0 \notin A \end{cases}$$

$\mu \not\ll \beta$, $\beta(\{0\}) = 0 \neq 1 = \mu(\{0\})$

$\beta \not\ll \mu$, $\beta((0,1)) = 1 \neq 0 = \mu((0,1))$

$\beta \perp \mu$, pues $\{0\} \in \mathcal{B}$, $\beta(\{0\}) = 0$, $\mu(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0$

ii. sea X un conjunto, $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$

con $\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset) = 0$, $\mu(X) = 1$, $\nu(X) = \infty$. $\mu \not\perp \nu$, pero $\mu \ll \nu$ y $\nu \ll \mu$. Como ν no es σ-finita, no existe

$\frac{d\nu}{d\mu}$, $\frac{d\mu}{d\nu}$.

iii. sea $X = \mathbb{R}$, β la medida de Borel, μ la medida de contar.

$\beta << \mu$, pero $\mu \not<< \beta$. Queremos ver si $\exists$ $f = \frac{d\beta}{d\mu}$. suponga que $\exists$.

caso 1, $f \equiv 0$.

$\to \forall A \in \mathcal{A}$, $\beta(A) = 0$. $\lightning$

caso 2, $\exists$ $x_0 \in \mathbb{R}$ tq $f(x_0) \neq 0$.

$\beta(\{x_0\}) = \int_{\{x_0\}} f \, d\mu = f(x_0) \neq 0$. $\lightning$

teorema : sean μ, ν σ- finitas , $\nu << \mu$, $g \in \mathcal{L}_1(\nu)$, si $f = \frac{d\nu}{d\mu}$, entonces :

$$\int_X g \, d\nu = \int_X g f \, d\mu$$

dem :

α. vale para características

β. vale para simples

γ. vale por g medible positivas (conv. monótona)

δ. vale para $g = g^+ - g^- \in \mathcal{L}_1$

ε. vale para $g = \operatorname{Re} g + i \operatorname{Im} g \in \mathcal{L}_1$

Derivadas de medidas:

def : sea μ medida compleja en $\mathbb{R}^s$

$$(\overline{D\mu})(x) := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu(B_\varepsilon(x))}{\underbrace{|B_\varepsilon(x)|}_{\lambda(B_\varepsilon(x))}} := \text{upper derivative of } \mu \text{ in } x$$

$$(\underline{D}\mu)(x) := \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu(B_\varepsilon(x))}{|B_\varepsilon(x)|} \quad := \text{lower derivative.}$$

$$\longrightarrow (D\mu)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu(B_\varepsilon(x))}{|B_\varepsilon(x)|} =: \text{derivative of } \mu \text{ in } x$$

si el lím $\exists$.

teorema: Sean $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Entonces F es derivable λ ae y $F'(x) = f(x)$

dem: sean $\varepsilon, \delta > 0$ y sea

$$\limsup_{n \to \infty} \left| n\left(F(x + 1/n) - F(x)\right) - f(x) \right| =: Df(x)$$

Queremos probar que $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : Df(x) \geq 2\delta\}) = 0$

Tome $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, $h \in C(\mathbb{R})$ tq $f = g + h$, $\|g\|_1 < \varepsilon$.

$$\longrightarrow (Df)(x) = \limsup_{n \to \infty} \left| n \int_x^{x+1/n} g(t)\,dt - g(x) \right| + \underbrace{\lim_{n \to \infty} \left| n \int_x^{x+1/n} h(t)\,dt - h(x) \right|}_{= 0, \text{ Análisis 1}}$$

Ahora, sea $K = \{x \in \mathbb{R} : |n \int_x^{x+1/n} g(t)\,dt - g(x)| \geq 2\delta\}$
$\subseteq \{x \in \mathbb{R} : |n \int_x^{x+1/n} g(t)\,dt| \geq \delta\} \cup \{x \in \mathbb{R} : |g(x)| \geq \delta\}$

$$\longrightarrow \lambda(\{x \in \mathbb{R} : |g(x)| \geq \delta\}) = \int_{|g(x)| \geq \delta} d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} \overbrace{\frac{|g(x)|}{\delta}}^{\geq 1} d\lambda = \frac{1}{\delta}\|g\|_1 < \varepsilon/\delta$$

$$\longrightarrow \lambda(\{x \in \mathbb{R} : |n \int_x^{x+1/n} g(t)\,dt| \geq \delta\}) \leq \frac{3\varepsilon}{\delta}$$

$$\longrightarrow \lambda(\{x \in \mathbb{R} : |Df(x)| \geq 2\delta\}) \leq \frac{4\varepsilon}{\delta}$$

si $\varepsilon \to 0$, tenemos el resultado deseado

Teorema Fundamental del Cálculo

def: $F:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $\forall a = a_0 \leq b_0 < a_1 < \cdots < b_k = b$ con $\sum_{n=1}^{k} b_n - a_{n-1} < \delta \longrightarrow \sum |f(b_n) - f(a_n)| < \varepsilon$

Función de Cantor:

sea C el conjunto de Cantor, donde

$$C := [0,1] \setminus \tilde{C}$$

$$\tilde{C} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k=1}^{2^n - 1} J_{\frac{2k-1}{2^n}}$$

sea $\psi_0 : \tilde{C} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\psi_0(x) = \frac{2k-1}{2^n} \quad \text{si } x \in J_{\frac{2k-1}{2^n}}$$

sea $\psi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi(x) = \sup\{\psi_0(t) : t \leq x\}$

ψ es continua, ψ es derivable en el abierto $\tilde{C}$ y $\psi'(x) = 0$ en $\tilde{C}$. Ent $\psi' \in \mathcal{L}_1$ y $\int_0^1 \psi'(x)\,dx = 0$ $\neq \psi(1) - \psi(0)$

El problema es que ψ no es abs. continua.

def: sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$ con $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. La variación de f con respecto a P se define como

$$V(P,f) = \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|$$

$$V(f) = \sup\{V(P,f) : P \text{ partición}\}$$

Obs:

a. si $V_a^x f := \mathrm{Var}\, f|_{[a,x]}$, $x \longmapsto V_a^x f$ es creciente

b. $V_a^b f = 0 \Longleftrightarrow f = \text{cte}$

c. si f es monótona creciente, ent $V_a^x f = f(x) - f(a)$

d. si $c \in (a,b)$, ent $V_a^c f + V_c^b f = V_a^b f$

e. si f es de variación acotada, ent f es acotada.

En efecto, $\forall x \in (a,b)$, $|f(a) - f(x)| \leq V_c^b f$

$\rightarrow |f(x)| \leq |V_a^b f| + |f(a)|$

f. $f + V_a^{\cdot}$ es creciente

$f - V_a^{\cdot}$ es decreciente

$$\rightarrow f = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{(f + V_a^{\cdot})}_{\text{creciente}} + \underbrace{(f - V_a^{\cdot})}_{\text{decreciente}}\Big)$$

(corolario - de variación acotada)

teorema: sea $f\ [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ no decreciente. Entonces es equivalente:

i) f es absolutamente continua

ii) $\forall A \in \mathcal{B}$ con $\lambda(A) = 0$, ent $\lambda(f(A)) = 0$

iii) f es derivable λ a e, $f' \in \mathcal{L}_1([a,b])$ y

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f' \, d\lambda$$

Integración por partes:

sean $F, G : [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$ absolutamente continuas.

ent $f(x) = F'(x)$, $g(x) = G'(x)$ existen λ ae y

$$\int_a^b F(x) g(x)\, dx = F(x)\, G(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)\, G(x)\, dx$$

Espacios L_p:

def: sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $p \geq 1$.

si $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ medible. Ent

$$\mathcal{L}_p(X) := \{ f : X \rightarrow \mathbb{C} : \int_X |f|^p d\mu < \infty \}.$$

Para $f \in \mathcal{L}_p$, $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \right)^{1/p}$.

def: si $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ medible, definimos :

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \lambda(|f|^{-1}(\alpha,\infty)) = 0\}$$
$$= \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : |f| \leq \alpha \ \ \mu \text{ ae}\}$$

obs: Todos los $\mathcal{L}_p$ ($p \in [1,\infty]$) son espacios vectoriales

def: $\mathcal{L}_\infty := \{f: X \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ mb y } \|f\|_\infty < \infty\}$

Desigualdad de young: sean $a,b>0$, $p,q>0$ tq $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Ent $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Desigualdad de Hölder: sean $p,q>0$ tq $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (con la conv. que si $p=1, q=\infty$). si $f \in \mathcal{L}_p(X)$, $g \in \mathcal{L}_q(X)$. Entonces $fg \in \mathcal{L}_1(X)$ y

$$\left|\int fg \, d\mu\right| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

generalizaciones:

- sean $p_j>0$ tq $\frac{1}{p_1}+\dots+\frac{1}{p_n}=1$

si $f_j \in \mathcal{L}_{p_j}(X) \Longrightarrow \|f_1 \cdots f_n\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}$

- si $1/p + 1/q = 1/s$, $f \in \mathcal{L}_p(X)$, $g \in \mathcal{L}_q(X)$, ent

$fg \in \mathcal{L}_s(X)$ y $\|fg\|_s \leq \|f\|_p \|g\|_q$

- $1 \leq s \leq r \leq t$, $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}$

$\Longrightarrow \|f\|_r \leq \|f\|_s^\theta \cdot \|f\|_t^{1-\theta}$

13.11.2014

teorema (desigualdad de Minkowski): sea $p \in [1,\infty]$, $f,g \in \mathcal{L}_p(X)$. Entonces

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Corolario: $(\mathcal{L}_p(X), \|\cdot\|_p)$ es un espacio seminormado.

def: $\eta := \{ f \in \mathcal{L}_p(X) : f = 0 \ \mu\text{ ae} \}$

def: $L_p(X) := \mathcal{L}_p(X) / \eta$

teorema: $L_p(X)$ es un espacio normado

teorema: sean $p \in [1, \infty)$ y $(f_n)_n \subseteq L_p(X)$ una sucesión de Cauchy. Ent $\exists f \in L_p(X)$ y una subsucesion $(f_{n_k})_k$ tq $f_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$ y $f_{n_k} \longrightarrow f$ puntualmente μ a.e.

dem: como $(f_n)_n$ es de Cauchy, $\exists (f_n)_k$ tq

$$\| f_{n_k} - f_{n_{k+1}} \|_p < 1/2^k$$

y sea $g_k = \sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \in L_p$ con

$$\| g_k \|_p \leq \sum_{j=1}^{k} 1/2^j \leq 1.$$

sea $g := \lim_{k \to \infty} g_k$, existe puntualmente en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Entonces, por el teorema de convergencia monótona,

$$\int_X |g|^p d\mu = \int_X (\lim g_k)^p d\mu$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int_X (g_k)^p d\mu$$

conv. mon y cont. de x^p

$$\leq 1$$

$\longrightarrow g \in L_p(X)$. Además, $g(x) \neq \infty$ μ ae.
Entonces para μ casi todos $x \in X$, $\lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) + f_{n_1}(x)$ converge. sea $f(x) := \limsup_{k \to \infty} f_{n_k}(x)$. Por lo anterior, sabemos que $f(x) = \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x)$ μ a.e

Veamos ahora que $f_{n_k} \xrightarrow{\| \|_p} f$

$\rightarrow \int_X |f - f_{n_k}|^p = \int_X \lim_{l \to \infty} |f_{n_l} - f_{n_k}| d\mu$

$$\leq \liminf_{l \to \infty} \int_X |f_{n_l} - f_{n_k}|^p d\mu$$

$$= \liminf_{l \to \infty} \| f_{n_l} - f_{n_k} \|^p \leq 1/2^k$$

$\longrightarrow f - f_{n_k} \in L_p(X) \longrightarrow f \in L_p(X)$, pues $L_p(X)$ es un esp. vectorial y $\| f - f_{n_k} \|_p^p \longrightarrow 0$, $k \to \infty$

Corolario: $L_p(X)$ es un espacio de Banach.

dem: sea $(f_n)_n \subseteq L_p(X)$ de cauchy. Entonces contiene una subsucesión convergente. Entonces f_n converge.

teorema: Si $(f_n)_n \subseteq L_\infty(X)$ es de cauchy. Entonces $\exists f \in L_\infty(X)$ y una subsucesión $(f_{n_k})_k$ tq $f_{n_k} \to f$.

dem: sea $(f_n)_n \subseteq L_\infty(X)$ una sucesión de cauchy.

$\forall k: \quad A_k := \{ x \in X : |f_k(x)| > \| f_k \|_\infty \}$

$\forall n,m: \quad B_{nm} := \{ X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \| f_n - f_m \|_\infty \}$

sea $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \cup \bigcup_{n,m} B_{n,m}$, ent $\mu(C) = 0$ y $(f_n)_n$ es uniformemente cauchy en X/C. sea

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{n \to \infty} f(x), & x \in X \setminus C \\ 0 & x \in C \end{cases}$$

$\longrightarrow f_n \xrightarrow{\| \cdot \|_\infty} f$

Corolario: L_∞ es un espacio de Banach

Aproximación de funciones en $L_p(X)$:

def: Sea $(X, \|\|)$ un espacio de Banach. $M \subseteq X$ es denso si y sólo si $\overline{M} = X$ ó si $\forall x \in X \quad \exists (m_n)_n \subseteq M$ tq $m_n \longrightarrow x$.

Funciones simples

teorema: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida con $1 \leq p \leq \infty$. Si $S := E(X, \mathcal{A}) \cap L_p(X)$. Ent $L_p(X) = \overline{S}^{\|\|_p}$.

dem: Sea $f \in L_p(X)$. sin restricción $f \geq 0$. Ent $\exists (s_n)_n \subseteq E^+(X, \mathcal{A}) \cap L_p$ tq $0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$ y $s_n \longrightarrow f$

caso 1: $p = \infty$

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty < \infty \quad \mu \text{ ae.}$$

$$\Longrightarrow s_n \longrightarrow f \text{ uniformemente } \mu \text{ ae}$$

$$\Longrightarrow s_n \xrightarrow{\|\|_\infty} f$$

Caso 2:

$$\lim_{n \to \infty} \int_X |f - s_n|^p d\mu = \int_X \lim_{n \to \infty} |f - s_n|^p d\mu = 0$$

Por convergencia dominada, pues $\forall n : |f - s_n|^p \leq (|f| + |s_n|)^p \leq 2^p |f|^p \in L_1(X)$

Funciones continuas:

teorema de Lusin: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida donde (X, τ) es de Hausdorff localmente compacto con μ una medida regular de Borel. Si $A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A) < \infty$ y $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ medible con $f(x) = 0$ para $x \notin A$

sea $\varepsilon>0$, ent $\exists g_\varepsilon \in C_c(X)$ tq $\mu(\{x\in X: f(x)\neq g_\varepsilon(x)\})<\varepsilon$.
Además, puede escogerse g_ε tq $\sup_{x\in X}|g_\varepsilon(x)| \leq \sup_{x\in X}|f(x)|$

x topologico loc comp. de Hausdorff y μ borel regular

teorema: sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ espacio de medida, $p\in[1,\infty)$.
Entonces $\overline{C_c(X)}^{\|\cdot\|_p} = L_p(X)$ (en particular $C_c(X)\subseteq L_p(X)$)

dem: sea $f\in L_p(X)$, ent $\exists (s_n)_n \subseteq \mathcal{E}^+(\mathcal{A},X)\cap L_p(X)$
tq $s_n \longrightarrow f$ en $\|\cdot\|_p$ y $\mu(\{x\in X: s_n(x)\neq 0\})<\infty$.
sea $\varepsilon>0$, ent $\exists s\in \mathcal{E}^+(\mathcal{A},X)\cap L_p(X)$ tq

$$\|f-s\|_p < \varepsilon/2.$$

Ent por Lusin, $\exists g\in C_c(X)$ tq $g(x)=s(x)$ en
$X\setminus B$ donde $B\in\mathcal{A}$ con

$$\mu(B) < \left(\frac{\varepsilon}{2\|s\|_\infty+1}\right)^p$$

y $\|g\|_\infty \leq \|s\|_\infty$

$$\longrightarrow \|f-g\|_p \leq \|f-s\|_p + \|s-g\|_p < \varepsilon/2 + \left(\int_B |s-g|^p d\mu\right)^{1/p}$$

$$\leq \varepsilon/2 + \|s-g\|_\infty \mu(B)^{1/p}$$

$$\leq \varepsilon/2 + 2\|s\|_\infty \frac{\varepsilon}{2\|s\|_\infty+1} < 3\varepsilon/2$$

def: sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida con (X,τ) de Hausdorff localmente compacto.

$$C_c(X) := \{f: X\longrightarrow \mathbb{C} : \operatorname{supp} f \text{ es compacto, } f \text{ continua}\}$$

$$C_0(X) := \{f: X\longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ cont tq } \forall\varepsilon>0, \exists K \text{ compacto tq } |f(x)|<\varepsilon \ \forall x\in X\setminus K\}$$

$$C_c(X) \subseteq C_0(X)$$

teorema :

$$\overline{C_c(X)}^{\|\ \|_\infty} = C_0(X)$$

Espacios duales: de $L_p(X)$:

def: sea X un espacio de Banach.

$$X' := \{ \varphi : X \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es funcional lineal acotado} \}$$

teorema: sean $p, q \in [1, \infty)$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ent

$$(L_p(X))' = L_q(X) \qquad X\ \sigma \text{ finito}$$

bajo la identificación $g \in L_q(X)$, ent $g \longleftrightarrow \varphi_g$, con $\varphi_g : L_p(X) \longrightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_g(f) = \int_X f\bar{g}\,d\mu$. //

dem: $L_q(X) \subseteq (L_p(X))'$ /

$(L_p(X))' \subseteq L_q(X)$:

caso 1, $\mu(X) < \infty$: sea $\varphi \in (L_p(X))'$.

Queremos un $g \in L_q(X)$ tq $\forall f \in L_p(X)$,

$$\varphi(f) = \int f\bar{g}\,d\mu$$

$\forall A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = \varphi(\chi_A)$. Veamos que ν es una medida.

α. $\nu(\emptyset) = \varphi(\chi_\emptyset) = \varphi(0) = 0$

β. $(A_j)_j \in \mathcal{A}$ Pordisjuntos $\longrightarrow$ $\nu(\bigcup A_j) = \sum \nu(A_j)$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\nu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) - \nu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \right) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\chi_A) - \varphi\big(\chi_{\bigcup_{j=1}^n A_j}\big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big(\varphi(\chi_A) - \sum_{j=1}^{n} \varphi(\chi_{A_j}) \Big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \varphi\Big(\chi_A - \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j} \Big) = \varphi\Big(\lim_{n\to\infty} \chi_A - \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j} \Big)$$

$=$

entonces por teorema Radon-Nikodym, $\exists\, g \in L(X,\mu)$ tq

$$\forall A \in \mathcal{A}: \varphi(\chi_A) = \int_X \chi_A\, g \, d\mu$$

$$\Longrightarrow \forall f \in L^\infty, \ \varphi(f) = \int_X f g \, d\mu$$

def: $\operatorname{ess\,sup} f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : f \leq \alpha \ \lambda^n \text{ a.e.}\}$

$\operatorname{ess\,inf} f = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : f \geq \alpha \ \lambda^n \text{ a.e.}\}$

$$\operatorname{ess\,inf} f = -\operatorname{ess\,sup} (-f)$$