$(f \circ \varphi) | \det D\varphi |$ en vez de f.

teorema de Sard: sean $Y, X \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos y

$$\varphi : X \longrightarrow Y \quad C^1$$

sea $C := \{ x \in X : \det(D\varphi(x)) = 0 \}$, entonces

$$\beta^n(\varphi(C)) = 0.$$

28.10.2014

teorema de Representación de Riez:

obs: Aquí, todos los espacios topológicos son Hausdorff, porque en un Hausdorff los compactos son cerrados y ent los compactos están en la σ álgebra de Borel.

Medidas de Borel y de Radon:

def: sea (X, τ) un espacio topológico. $\mathcal{B}(X)$ la σ álgebra de Borel sobre X, es decir la σ-álgebra generada por los abiertos en X

def: sea (X, τ) un espacio topológico y $\mu : \mathcal{B}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ una medida. μ se denomina **medida de Borel** si $\mu(K) < \infty$ para cada compacto $K \subseteq X$.

μ se denomina **localmente finita** si $\forall x \in X$, $\exists$ vecindad V tq $\mu(V) < \infty$

μ se denomina **inner regular** ssi $\forall B \in \mathcal{B}(X)$,
$\mu(B) = \sup\{ \mu(K) : K \text{ es compacto}, K \subseteq B \}$.

μ se denomina **outer regular** ssi $\forall B \in \mathcal{B}(X)$,
$\mu(B) = \inf\{ \mu(U) : U \text{ es abierto y } U \supseteq B \}$

μ se denomina **regular** si μ es inner regular y outer regular

def: un conjunto $B \subseteq \mathcal{B}(X)$ se dice inner regular/outer regular si B satisface la cond. de inner regul/outer reg.

obs:

i. si μ es finita, μ es de Borel

ii. si μ es localmente finita, ent $\forall K \subseteq X$ compacto, $\exists V$ abierto con $K \subseteq V$ y $\mu(V) < \infty$

dem. $\forall x \in K$, tome V_x vecindad de x con $\mu(V_x) < \infty$ como K es compacto, $\exists x_1, \dots, x_n \in K$ tq $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_{x_j}$

y $\mu(K) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} V_{x_j}\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(V_{x_j}) < \infty$

iii. si μ es localmente finito, μ es Borel

iv. X localmente compacto, ent μ es localmente finito $\Longleftrightarrow$ μ es Baal

ej:

i. sea (X, τ) Hausdorff, $a \in X$

$$\mu_a(B) := \begin{cases} 1, & a \in B \\ 0, & a \notin B \end{cases}$$

es inner regular, pues los singleton son compactos.

Es outer regular

ii. sea $X = \mathbb{R}$, μ = medida de conteo

μ no es Borel, es inner regular y no es outer regular

def: sea (X, T) un espacio de Hausdorff. $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty]$
μ se dice **medida de Radon** si μ es localmente finita e inner regular.

En particular, si X es localmente compacto, ent cada medida de Radon es una medida de Borel inner regular.

Espacios de Hausdorff localmente compactos:

obs: (compactificación de Alexandroff) cada esp. de Hausdorff localmente compacto está contenido en un espacio compacto.

sea X localmente compacto de Hausdorff y $\omega \notin X$, sea

$$\tilde{X} := X \cup \{\omega\}$$

Defina
$$T_{\tilde{X}} := \begin{cases} U \subseteq X \text{ abierto} & \text{si } \omega \notin U \\ X/U \text{ compacto,} & \text{si } \omega \in U \end{cases}$$

def: sea (X, T_X) y $f : X \to \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$, defina

$$C(X) := \{ f : X \to \mathbb{C} \text{ continuas} \}$$

$$C_b(X) := \{ f \in C(X) : f \text{ acotada} \}$$

$$C_c(X) := \{ f \in C(X) : \operatorname{supp} f \text{ es compacto} \}$$

donde $\operatorname{supp} f := \overline{\{ x \in X : f(x) \neq 0 \}}$

Ahora, si $f \in C_b(X)$,

$$\|f\|_\infty := \sup \{ |f(x)| : x \in X \}$$

Es claro que

$$C_c(X) \subseteq C_0(X) \subseteq C_b(X) \subseteq C(X)$$

donde $C_0(X) := \{ f \in C(X) : \forall \varepsilon > 0, \exists K \subseteq X$ compacto tq $\forall x \in X \setminus K, |f(x)| < \varepsilon \}$

y $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach

Recall:

lema de Urysohn: sea X localmente compacto, $U \subseteq X$ abierto, $K \subseteq X$ compacto con $K \subseteq U$, ent $\exists f \in C(X)$, tq $0 \leq f \leq 1$ y $f|_K = 1$, $f|_{X \setminus U} = 0$

obs: El lema de Urysohn nos permite probar lo siguiente - si V abierto tq $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ y ent $\exists f \in C(X)$ tq $\operatorname{supp} f \subseteq U$.

Partición de unidad:

sea X localmente compacto, si $K \subseteq X$ compacto, sean $U_1, \dots, U_n \subseteq X$ abiertos tq $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_j$.

ent $\exists \{f_1, \dots, f_n\} \subseteq C_c(X)$ tq $\forall j$, $\operatorname{supp} f_j \subseteq U_j$, $\forall x \in K$, $\sum_{j=1}^{n} f_j(x) = 1$ y $\forall x \in X$, $\sum_{j=1}^{n} f_j(x) \leq 1$

Corolario: sea X localmente compacto, $K \subseteq X$ compacto, $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_j$. Ent $U_1, \dots, U_n$ abiertos con $\exists K_j$ compactos tq $K_j \subseteq U_j$, $K = \bigcup_{j=1}^{n} K_j$

Ahora, sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto con μ medida de Radon

Si $J_\mu : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \longmapsto \int_X f d\mu = J_\mu(f)$.

Ent, J es un funcional lineal acotado positivo sobre $C_c(X)$. Donde si Y es un $\mathbb{K}$ campo vectorial, $J : Y \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal si $\forall x, y \in Y$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

$$J(x + \alpha y) = J(x) + \alpha J(y)$$

J es positivo si Y es un espacio de funciones y $\forall f \in Y$ con $f \geq 0$, $Jf \geq 0$.

Note que $f \in \mathcal{L}_1(X)$, pues $\int_X |f| d\mu \leq \mu(\operatorname{supp} f) \|f\|_\infty$

Entonces, una medida de Radon siempre induce un funcional lineal positivo sobre $C_c(X)$.

obs: Aquí, siempre X es un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto y $J : C_c(X) \to \mathbb{C}$ funcional lineal positivo.

Vamos a probar: existe una única medida de Radon sobre X tq $\forall f \in C_c(X)$, $Jf = \int_X f d\mu$

Pasos principales:

1. $\mu_0(K) := \inf \{ Jf : f \in C_c(X), f \geq \chi_K \}$ para $K \subseteq X$ compacto.

2. μ_0 se deja extender a una medida

3. Esta extensión representa al funcional lineal dado

Lema: sea X localmente compacto, Hausdorff.

$$I : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{K}$$

funcional lineal positivo y sea

$$\mu_0(K) := \inf \{ If : f \in C_c(X),\ f \geq \chi_K \}$$

i. $K, L \subseteq X$ compactos, ent:

α. $K \subseteq L \Rightarrow \mu_0(K) \leq \mu_0(L) < \infty$

β. $\mu_0(K \cup L) \leq \mu_0(K) + \mu_0(L)$

γ. $K \cap L = \emptyset \Rightarrow \mu_0(K \cup L) = \mu_0(L) + \mu_0(K)$

ii. $K \subseteq X$ compacto, $\varepsilon > 0$, ent $\exists\, U \subseteq X$ abierto, $U \subseteq K$, $\therefore \forall L$ compacto, $L \subseteq U$, $\mu_0(L) \leq \mu_0(K) + \varepsilon$.

dem:

i. α. $\mu_0(K) \leq \mu_0(L)$ por def μ_0 y def de inf.
y $\mu_0(L) < \infty$ por el lema de Urysohn.

β. sean $f, g \in C_c(X)$ con $f \geq \chi_K$, $g \geq \chi_L$

$$\Rightarrow f + g \geq \chi_K + \chi_L \geq \chi_{K \cup L}$$

$$\xrightarrow{\text{tomar inf}} \mu_0(K) + \mu_0(L) \geq \mu_0(K \cup L)$$

γ. Basta probar que $\mu_0(K \cup L) \geq \mu_0(K) + \mu_0(L)$

sea $h \in C_c(X)$ tq $h \geq \chi_{K \cup L}$. Tome $\varphi \in C_c(X)$ tq $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi|_K = 1$, $\varphi|_L = 0$. Defina

$$f_h := \varphi h$$
$$g_h = (1 - \varphi) h$$

$\longrightarrow f_n + g_n = h_n$, f_n, g_n [illegible]

$f_n \geq \chi_K$ [illegible]

[illegible] $\underbrace{h_n}_{\int f_n + \int g_n}$ [illegible]

$\geq \inf \{ \int f : f \in C_c(X)$ [illegible]

[illegible]

$= \mu_0(K) + \mu_0($[illegible]$)$

[illegible]

ii. [illegible] $\exists f \in C_c(X)$ tq $\int f \leq \mu_0(K) + \delta$, como [illegible] cont, ent $U_\delta = \{x \in X : f(x) > \frac{1}{1+\delta}\}$ [illegible], $K \subseteq U_\delta$. Ent $(1+\delta) f \in C_c(X)$.

Además, $(1+\delta) f \geq \chi_{U_\delta}$ [illegible] $L \subseteq U_\delta$, $(1+\delta) f \geq \chi_L$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \mu_0(L) &\leq \int (1+\delta) f = (1+\delta) \int f \\
&\leq (1+\delta)(\mu_0(K) + \delta) \\
&= \mu(K) + \delta(\mu_0(K) + 1 + \delta) \\
&= \mu(K) + \delta(\mu_0(K) + 1 + \delta)
\end{aligned}
$$

[illegible] $\delta > 0$ tq $\delta(\mu_0(K) + 1 + \delta) < \varepsilon$

Lema: [illegible] K [illegible] compacto [illegible] tq las prop ∅ y Y [illegible] se satisfacen [illegible]

Entonces:

$$\mu_0(L) - \mu_0(K) = \sup\{\mu_0(C) : C \in \tilde{\mathcal{R}},\ C \subseteq L \setminus K$$

dem:

"$\geq$": sea $C \in \tilde{\mathcal{R}}$, $C \subseteq L \setminus K$, ent $C \cap K = \emptyset$ y $C \dot{\cup} K \in \tilde{\mathcal{R}}$ y $C \cup K \subseteq L$, ent $\mu_0(C) + \mu_0(K)$ $= \mu_0(C \dot{\cup} K) \leq \mu_0(L)$, ent

$$\mu_0(L) - \mu_0(K) \geq \mu_0(C)$$

Al tomar sup sobre los C's, obtenemos.

$$\mu_0(L) - \mu_0(K) \geq \sup\{\dots\}$$

"$\leq$": sea $\varepsilon > 0$ y U abierto tq $K \subseteq U$ y $\forall T \subseteq U$ compacto y $\mu_0(T) \leq \mu_0(K) + \varepsilon$

Sabemos que $L \setminus U$ es compacto y K es compacto.

Tome V, W abiertos tq $V \cap W = \emptyset$, $K \subseteq V$, $L \setminus U \subseteq W$

y sea $C := L \setminus V$, $D = L \setminus W$. C, D son compactos,

$C \cup D = L$, $\mu_0(D) \leq \mu_0(K) + \varepsilon$

$$\leq \mu_0(K) + \mu_0(C) + \varepsilon$$

$$\implies \mu_0(L) - \mu_0(K) \leq \mu_0(C) + \varepsilon$$

$$\implies \mu_0(L) - \mu_0(K) \leq \sup\{\dots\}.$$

teorema de extensión: sea X Haussdorff, $\mu_0 : \tilde{\mathcal{R}} \to [0,\infty]$ tq α, β, γ se tienen. Ent $\exists$ una extensión de μ_0 a una medida $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0,\infty]$ inner regular, $\mu_0(K) = \mu(K)$, $K \in \tilde{\mathcal{R}}$. $\circledast$

μ salisface $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \in \tilde{K}, K \subseteq A\}$, $A \in \mathcal{B}(X)$.

dem :

unicidad : Es claro si tengo inner regularidad

Existencia : sea μ como en ⊛. $\forall K \in \tilde{K}$, sea $\mathcal{A}_K := \{M \subseteq X : \mu(K) = \mu(K \cap M) + \mu(K \setminus M)\}$ y sea $\mathcal{A} = \bigcap_{K \in \tilde{K}} \mathcal{A}_K$.

$\geq$ siempre se tiene

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ es estable bajo complementos:

$\emptyset$ es compacto, ent

$$\mu_0(\emptyset) = \mu_0(\emptyset \cup \emptyset) = 2\mu(\emptyset)$$

$$\mu_0(\emptyset) = 0$$

y $\forall K \in \tilde{K}$, $\mu_0(K) = \mu_0(\cancel{K \cap \emptyset})^{0} + \mu_0(K \setminus \emptyset)$

Estabilidad bajo complementos es clara.

2. $(A_j)_j \subseteq \mathcal{P}X$, por disjuntos. Ent

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

dem: sean $A_1, A_2 \subseteq X$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$\longrightarrow \mu(A_1) + \mu(A_2) \leq \mu(A_1 \cup A_2)$

Es claro que si $\mu(A_1) = \infty$ ó $\mu(A_2) = \infty$.

si $\mu(A_1) \neq \infty \neq \mu(A_2)$, ent $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K_1, K_2$ compactos tq $K_j \subseteq A_j$ y $\underbrace{\mu(K_1) + \mu(K_2)}_{\leq \mu(A_1 \cup A_2)} - \varepsilon \geq \mu(A_1) + \mu(A_2)$

pues $\mu(A_1) + \mu(A_2) \leq \mu(A_1 \cup A_2) + \varepsilon$. Si $\varepsilon \to 0$,

$\mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A_1 \cup A_2)$.

Inductivamente, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{N} \mu(A_j) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{N} A_j\right) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

$$\bigcup_{j=1}^{N} A_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

$$\longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

3. subaditividad de μ y $\mathcal{A}$ es σ-álgebra:

sea $(M_j)_j \subseteq \mathcal{A}$, queremos probar que

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \in \mathcal{A} \quad \text{y} \quad \mu(M) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(M_j)$$

sea $K \in \tilde{\mathcal{K}}$, $\forall j: \mu(K) = \mu(K \cap M_j) + \mu(K \setminus M_j)$

y sea $\varepsilon > 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$, tome A_n, B_n compactos

tq $A_n \subseteq K \cap M_n$, $B_n \subseteq K \setminus M_n$ con

$$\mu_0(A_n) + \mu_0(B_n) + \varepsilon/2^n \geq \mu(K)$$

$A_n \cap B_n = \emptyset$

Tomemos:

$A_n' = (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n \subseteq A_n$

$B_n' = (B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}) \cup B_n \supseteq B_n$

$A_n \setminus A_n' = (A_1 \cup \cdots \cup A_n) \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})$

$B_n' \setminus B_n = (B_1 \cap \cdots \cap B_n) \setminus (B_1 \cap \cdots \cap B_n)$

$$\longrightarrow -\varepsilon/2^n \leq \mu(A_n) + \mu(B_n) - \underbrace{\mu(K)}_{\leq \mu(A_n') + \mu(B_n')}$$

$$\leq \mu(A_n) - \mu(A_n') + \mu(B_n) - \mu(B_n')$$

$$= [\mu(A_n) - \mu(A_n')] - [\mu(B_n') - \mu(B_n)]$$

$$= \sup\{\mu_0(C) : C \in \tilde{\mathcal{K}},\ C \subseteq A_n \setminus A_n'\}$$

$$- \sup\{\mu_0(C) : C \in \tilde{\mathcal{K}},\ C \subseteq B_n' \setminus B_n\}$$

$= \mu(A_1 \setminus B_1) - \mu(B_1 \setminus B_n)$

$\mu[A_1 \cup \dots \cup A_n \setminus (A_1 \cup \dots A_{n-1})]$

$\mu[B_1 \cap \dots \cap B_{n-1} \setminus B_1 \cap \dots \cap B_n]$

$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) - \mu(A_1 \cup \dots A_{n-1})$

$\mu(B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}) - \mu(B_1 \cap \dots \cap B_n)$

compacto

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} \varepsilon/2^n \leq \sum_{n=1}^{N} (\mu(A_1 \cup \dots A_n) - \mu(A_1 \cup \dots A_{n-1}) - \mu(B_1 \cap \dots B_{n-1})$
$+ \mu(B_1 \cap \dots \cap B_n) - \mu(B_1 \cap \dots B_{n-1})$

$= -\mu(A_1) - \mu(B_1) + \mu(A_1 \cup \dots A_N)$
$+ \mu(B_1 \cap \dots \cap B_N)$

$\forall N \in \mathbb{N}$:
$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_N) + \mu(B_1 \cap \dots \cap B_N) \leq \mu(A_1) + \mu(B_1) - \frac{\varepsilon}{2}$
$= \mu(X) - \varepsilon/2$

$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_N) + \mu(B_1 \cap \dots \cap B_N) < \mu(X) - \varepsilon$

sobre $\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j$

$\mu(D) \geq$

$D \cap (\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j) = \varnothing$ $\cup A (\bigcap_{j}^{N_0} B_j) = \varnothing$

$\Rightarrow \forall n \geq N_0$

$\mu(D) \mu(\bigcap B_j) = \mu_0(D \cup \bigcap^{N_0} B_j) < \mu(B_j)$

$N \geq N_0$:

$$\underbrace{\mu(K \setminus M)}_{\supseteq \bigcap_{j=1}^{N} B_j} + \mu(\underbrace{K \cap M}_{\supseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n}) \geq \mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) +$$

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right) \geq \mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + \mu(B_1 \cap \cdots \cap B_N) - \varepsilon$$

$$\geq \mu(K) - 2\varepsilon$$

$$\xRightarrow{\varepsilon \to 0} \mu(K \setminus M) + \mu(K \cap M) = \mu(K)$$

$\Longrightarrow M \in \Lambda_K$, $\forall K$, ent $M \in \Lambda$

Mói aín, $\forall N \geq N_0$:

$$\sum_{j=1}^{N} \underbrace{\mu(\underbrace{M_n \cap K}_{\supseteq A_n})}_{\geq \mu(A_n)} + \mu(K \setminus M)$$

$$\geq \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) + \mu(K \setminus M)$$

$$\geq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) + \mu(K \setminus M) \geq \mu(K) - 2\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{N} \mu(M_n \cap K) + \mu(K \setminus M) \geq \mu(K) - 2\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n \cap K) + \mu(K \setminus M) \leq \mu(K)$$

$$\mu(M) = \sup\{\mu_0(K) : K \in \mathcal{K},\ K \subseteq M\} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(M_j \cap K)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(M_j)$$

4-11-2014

Falla ver que $\mathcal{B}(X) \subset \Lambda$. Para ver eso, basta probar que $\forall A \subseteq X$, A cerrado, $A \in \Lambda$.

Sea $K \in \hat{\mathcal{K}}$, $A \cap K$ es compacto, $A \cap K \subseteq K$.

$$\mu_0(K) - \mu_0(A \cap K) = \sup \{\mu_0(L) : L \text{ compacto}, L \subseteq \underbrace{K \setminus (A \cap K)}_{= K \setminus A}\}$$

$$= \mu(K \setminus A)$$

$$\Longrightarrow \mu(K) = \mu(A \cap K) + \mu(K \setminus A)$$

$\Longrightarrow A \in \mathcal{A}_{\mathcal{K}}$, $A \in \mathcal{A}$.

teorema de Representación de Riesz: Sea (X, τ) localmente compacto Hausdorff y sea $J : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{K}$ funcional lineal positivo. Entonces $\exists!$ medida de Radon tq $\mu : \mathcal{B}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ y $\forall f \in C_c(X)$, $Jf = \int f \, d\mu$. Además, lo siguiente se tiene:

$\forall K \in \tilde{\mathcal{K}}$, $\mu(K) = \inf \{ Jf : f \geq \chi_K, f \in C_c(X)\}$

$\forall A \in \mathcal{B}(X)$, $\mu(A) = \sup \{ \mu(K) : K \in \tilde{\mathcal{K}}, K \subseteq A\}$

dem:

Unicidad: Sea μ medida de Radon que satisface nuestras hipótesis. Entonces como μ es inner regular, μ está determinada por sus valores en $\tilde{\mathcal{K}}$. Entonces queremos ver que μ satisface:

$$\mu(K) = \inf \{ Jf : f \geq \chi_K, f \in C_c(X)\}$$

"$\leq$": sea $f \in C_c(X)$, $f \geq \chi_K$. Entonces

$$Jf = \int_X f \, d\mu \geq \int_X \chi_K \, d\mu = \mu(K)$$

Tomar inf sobre las f.

"$\geq$": sean $K \in \tilde{\mathcal{K}}$, $\varepsilon > 0$. Ent $\exists U$ abierto, $K \subseteq U$ tq $\mu(U) \leq \mu(K) + \varepsilon$. sea $\varphi \in C_c(X)$ tq $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi|_K = 1$, $\varphi|_{X \setminus U} = 0$. Además:

$$\chi_K \leq \varphi \leq \chi_U$$

$$\Longrightarrow \quad J\varphi = \int_X \varphi \, d\mu \leq \int_X \chi_U \, d\mu = \mu(U) \leq \mu(K) + \varepsilon$$

Existencia: Defina μ así

$\forall K \in \hat{\mathcal{K}}$, $\mu(K) = \inf \{ Jf : f \geq \chi_K, f \in C_c(X) \}$
$\forall A \in \mathcal{B}(X)$, $\mu(A) = \sup \{ \mu(K) : K \subseteq A \}$

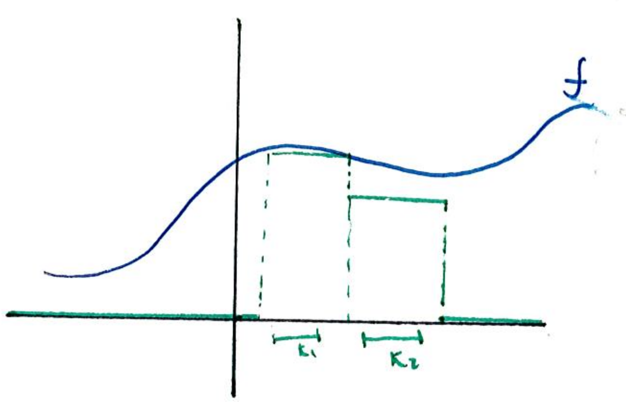
Ent por el teorema de extensión μ es medida sobre $\mathcal{B}(X)$. Falta probar que

$$Jf = \int f \, d\mu$$

sea $f \in C_c(X)$, ent $f \in \mathcal{L}_1(X, \mu)$. sin restricción $f \geq 0$. Vamos a probar que $Jf \geq \int_X f \, d\mu$

sea $u \in \mathcal{E}^+(X, \mathcal{B}(X))$, $0 \leq u \leq f$ con $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_j}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ y $\mu(A_j) \leq \mu(\operatorname{supp} f) < \infty$ con $A_j \in \mathcal{B}(X)$

sea $0 < \varepsilon < \min \{ \alpha_j : j = 1, \dots, n \}$. Ent $\forall j, \exists K_j \in \tilde{\mathcal{K}}$, $K_j \subseteq A_j$ tq $\mu(K_j) + \varepsilon \geq \mu(A_j)$



Los K_j son por disjuntos, ent $\exists U_j$ abiertos, tq son por disjuntos, $K_j \subseteq U_j$

$U_j \subseteq \underbrace{\{ x \in X : f(x) > \alpha_j - \varepsilon \}}_{\supseteq K_j}$ abierto

$j = 1, \dots, n$ [illegible] $g_j \in C_c(X)$ tq $\chi_{K_j} \leq g_j \leq \chi_{U_j}$ [illegible]

$g := \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \varepsilon)\, g_j \in C_c(X)$ [illegible] $g \leq f$. [illegible]

$$Jf \geq Jg = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \varepsilon)\, J(g_j) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(\alpha_j - \varepsilon)}_{\geq 0} \int_X g_j \, d\mu$$

$$\geq \sum [illegible])\, \mu(K_j)$$

$$\geq \sum_{j=1}^{n} [illegible] - \varepsilon) [\mu(A_j) - \varepsilon)]$$

$$\longrightarrow Jf \geq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} (\mu(A_j) + \alpha_j - \varepsilon)$$

$\longrightarrow Jf \geq \int u \, d\mu$ [illegible] y tomamos sup

$\longrightarrow Jf \geq \int f \, d\mu$

Vamos ahora [illegible] $Jf = \int_X f \, d\mu$ para [illegible] restricción, $0 \leq f \leq 1$. Sea $\varepsilon > 0$, [illegible] $\exists U$ abierto tq $K := \operatorname{supp} f \subseteq U$, K compacto y $\mu(U) \leq \mu(K) + \varepsilon$

[illegible] $\varphi \in C_c(X)$ tq $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi|_K = 1$, $\operatorname{supp} \varphi \subseteq U$

$\longrightarrow \varphi - f \geq 0$, $\varphi - f \in C_c(X)$ desig anterior y linealidad de $\int$

$\longrightarrow J\varphi - Jf = J(\varphi - f) \geq \int_X \varphi \, d\mu - \int_X f \, d\mu$

$\longrightarrow 0 \leq Jf - \int f \, d\mu \leq J\varphi - \int \varphi \, d\mu \leq \mu(U) - \mu(K)$

$\leq \varepsilon$

$\Longrightarrow J f = \int f \, d\mu$

Representación de medidas y Radon - Nikodym

teoremas de descomposición:

def: sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra, $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ tq

i. $\nu(\emptyset) = 0$

ii. $\nu\left(\dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j) \qquad A_j \in \mathcal{A}$

ν se denomina medida con signo.

si $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$, con i y ii, ν se denomina medida compleja.

obs: La serie en ii es incondicionalmente convergente.

lema: si ν es una medida compleja o con signo, ent $\exists M \in \mathbb{R}$ tq $\forall A \in \mathcal{A}$, $|\nu(A)| \leq M$.

dem: Por contradicción, supongamos que tal M no existe y sin restricción $Re\,\nu$ no es acotada por arriba.

Entonces, $\exists (A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$, $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R}^+$ tq

$$0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots$$

tq $a_n < Re(\nu(A_n)) < b_n$, $a_{n+1} > b_n + b_{n-1} + \dots + b_1 + 1$

Defino, $B_n := A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$

$$\longrightarrow Re(\nu(B_n)) = Re(\nu(A_n)) - Re(\nu(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}))$$
$$\geq Re(\nu(A_n)) + \sum_{j=1}^{n-1} Re(\nu(A_j)) \geq 1$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Re}(\nu(\underbrace{\dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}} B_j}_{\in \mathcal{A}})) = \sum_{j} \operatorname{Re}(\nu(B_j)) \geq \sum_{j} 1 = \infty \notin \mathbb{R}$$

obs: como para medidas normales, se puede probar que

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) \quad \text{si} \quad A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots, A_j \in \mathcal{A}$$

$$\nu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) \quad \text{si} \quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$$

ejemplos:

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $f \in \mathcal{L}_1(X)$, $\nu: \mathcal{A} \to \mathbb{C}$,

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu$$ es una medida compleja

def: sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, ν una medida con signo sobre $\mathcal{A}$.

- $A \in \mathcal{A}$ es positivo $\Longleftrightarrow$ $\forall B \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A$, $\nu(B) \geq 0$
- $A \in \mathcal{A}$ es negativo $\Longleftrightarrow$ $\forall B \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A$, $\nu(B) \leq 0$
- $A \in \mathcal{A}$ es ν-cero $\Longleftrightarrow$ $\forall B \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A$, $\nu(B) = 0$

lema: sea $\nu: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una medida con signo y $A \in \mathcal{A}$, ent $\exists B \in \mathcal{A}$ tq $B \subseteq A$, $\nu(B) \geq \nu(A)$, con B conjunto positivo

dem: Basta probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists B_n \subseteq A$, $B_n \in \mathcal{A}$ tq $\nu(B_n) \geq \nu(A)$ y $\forall C \in \mathcal{A}$, $C \subseteq B_n$, ent $\nu(C) \geq -1/n$

Lo anterior, pues los B_n se pueden escoger de la forma

$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$ y tome $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j$.

supongamos que no se tiene lo que afirmamos que bastaba probar. Entonces $\forall B' \subseteq A$, $B' \in \mathcal{A}$ con $\nu(B') \geq \nu(A)$.
Ent $\exists D \in \mathcal{A}$, $D \subseteq B'$ tq $\mu(D) \leq -1/n$

Inductivamente, construimos $(D_n)_n$ tq $D_n \subseteq A$

$D_n \subseteq A \setminus (D_1 \cup \cdots \cup D_{n-1})$, $\nu(D_n) \leq -1/n$

$\longrightarrow \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{A}$ y $\nu\left(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(D_n) \leq -\infty$

$\lightning$

6.11.2014

teorema (Descomposición de Hahn): sea $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ una medida signada, ent $\exists P, N \in \mathcal{A}$ tq P pos, N neg, $P \cap N = \emptyset$, $X = P \cup N$

obs: La descomposición, en general, no es única, si $P' \cup N' = X$ es otra, ent $P' \Delta P$ y $N' \Delta N$ son conjuntos ν-cero

dem: sea $\alpha = \sup\{\nu(A) : A \in \mathcal{A}\} < \infty$, ent $\exists P_n \in \mathcal{A}$ tq $\nu(P_n) \longrightarrow \alpha$, $n \to \infty$. sea $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$, sin restricción todos los P_n son positivos y P es positivo y $\nu(P) \geq \nu(P_n)$

$\Longrightarrow \nu(P) = \alpha$

sea $N = X \setminus P$, ent N es negativo, pues si no, $\exists A \subseteq N$, $A \in \mathcal{A}$ con $\nu(A) > 0$ y ent $P \dot{\cup} A$ es positivo y $\nu(P \dot{\cup} A) = \alpha + \nu(A) > \alpha$ $\lightning$

sea P' pos., N' neg. tq $X = P' \dot{\cup} N'$. sea $B \subseteq P \setminus P'$ con $B \in \mathcal{A}$. por un lado, $\nu(B) \geq 0$, pues $B \subseteq P$.

Pero $\nu(B) \leq 0$, puesto que $B \subseteq P'$. Ent $\nu(B) = 0$

Ent $P \setminus P'$ es ν cero y es análogo para $P' \setminus P$, $N \setminus N'$, $N' \setminus N$

def: sea $\nu: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una medida con signo. $\forall A \in \mathcal{A}$, defina:

$$\nu_+(A) = \nu(A \cap P) \geqslant 0 \quad \text{(Var positiva } \nu)$$

$$\nu_-(A) = -\nu(A \cap N) \geqslant 0 \quad \text{(Va. neg. } \nu)$$

$$|\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) \quad \text{(va. de } \nu)$$

teorema: sea $\nu: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una medida signada. Ent $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$\nu_+(A) = \sup\{\nu(B) : B \in \mathcal{A},\ B \subseteq A\}$$

$$\nu_-(A) = \sup\{-\nu(B) : B \in \mathcal{A},\ B \subseteq A\}$$

$$|\nu|(A) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |\nu(A_j)| : A_j \in \mathcal{A}, \text{ disjuntos}, A = \dot{\bigcup_{j=1}^{n}} A_j\right\}$$

$$= \sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |\nu(A_j)| : A_j \in \mathcal{A} \text{ disj}, A = \dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}} A_j\right\}$$

def: sean μ, ν medidas signadas. Decimos que μ y ν son mutualmente singulares si existe $N \in \mathcal{A}$ tq $\mu(N) = 0$ y $\nu(X \setminus N) = 0$ con N es μ cero y $X \setminus N$ es ν cero

notación: $\mu \perp \nu$

μ es ν continua si A es ν cero implica que A es μ cero.

notación: $\mu << \nu$

teorema (Descomposición de Jordan):

i) sea ν una medida signada sobre $\mathcal{A}$ ent existen medidas $\nu^{\pm}$ en $\mathcal{A}$, tq $\nu = \nu^+ - \nu^-$, $\nu^+ \perp \nu^-$. Si $\nu^{\pm}$ son como en la def, la descomposición es "minimal" en el siguiente sentido: sean $\rho^{\pm}: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ medidas tq $\rho^+ - \rho^- = \nu$,

$\rho^+ \perp \rho^-$, ent $\forall A \in \mathcal{A}$, $\rho^+(A) \geq \nu^+(A)$, $\rho^-(A) \geq \nu^-(A)$.

ii) Si ν es una medida compleja sobre $\mathcal{A}$, ent $\exists\, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ medidas sobre $\mathcal{A}$ tq $\nu = \nu_1 - \nu_2 + i\nu_3 - i\nu_4$.

dem:

Existencia: Tome $\nu^+ = \nu_+$, $\nu^- = \nu_-$

sean $\rho^\pm$ como en el enunciado del teorema. Sea $B \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \nu^+(B) &= \nu(P \cap B) \\ &= \rho^+(P\cap B) - \underbrace{\rho^-(P\cap B)}_{\geq 0} \\ &\leq \rho^+(P \cap B) \\ &\leq \rho^+(B) \leftarrow \rho^+ \text{ es medida} \end{aligned}$$

Análogamente, $\nu^-(B) \leq \rho^-(B)$

Integración con respecto a medidas complejas:

Sea μ medida compleja sobre $\mathcal{A}$. Tome medidas $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ tq $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$

Para $f: X \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}_1(|\mu|)$ defina

$$\int_X f\, d\mu := \int_X f\, d\mu_1 - \int_X f\, d\mu_2 + i\int_X f\, d\mu_3 - i\int_X f\, d\mu_4$$

Radon - Nikodym:

def: una forma sesquilineal es una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ tq $\forall\, x, y, z \in H$, $\lambda \in \mathbb{K}$: $\langle x + \lambda y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \lambda\langle y, z\rangle$ y $\langle x, z\rangle = \overline{\langle z, x\rangle}$ con $\langle x, x\rangle > 0$ si $x \neq 0$.

Entonces $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induce una norma, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Entonces, $(H, \|\ \|)$ es un espacio normado. $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio de Hilbert si $(H, \|\ \|)$ es un esp de Banach