Medidas de producto, teoremas de Fubini–Tonelli:

def: sean $(X_j, \mathcal{A}_j)$, $j \in [\![1,n]\!]$ espacios mb. Entonces

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n := \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j \quad (\sigma\text{-álgebra producto})$$

es la σ-álgebra más pequeña tq todas las proyecciones $X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_j$ son funciones mb.

teorema: sean $(X_j, \mathcal{A}_j)$ espacios mb. Supongamos que $\forall j \in [\![1,n]\!]$, existe una familia $\mathcal{B}_j \subseteq \mathcal{A}_j$ tq

α. $\mathcal{B}_j$ generan $\mathcal{A}_j$

β. $\exists (B_{jk})_k \subseteq \mathcal{B}_j$ tq $B_{j1} \subseteq B_{j2} \subseteq B_{j3} \subseteq \cdots$

y $X_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{jk}$. Entonces, $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ es generado por $\{ B_1 \times \cdots \times B_n : B_j \in \mathcal{B}_j \}$

dem: sea $\overline{\mathcal{A}} :=$ σ-álgebra generada por $\{B_1 \times \cdots \times B_n : B_j \in \mathcal{B}_j\}$

Queremos probar que $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$

"$\subseteq$": sea $B_1 \times \cdots \times B_n$ con $B_j \in \mathcal{B}_j$, entonces

$$B_1 \times \cdots \times B_n = \bigcap_{j=1}^{n} \underbrace{\pi_j^{-1}(B_j)}_{\in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n} \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$$

como $B_1 \times \cdots B_n$, $B_j \in \mathcal{B}_j$ generan a $\overline{\mathcal{A}}$, $\overline{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$

"$\supseteq$": Queremos probar que las proyecciones π_j son $\overline{\mathcal{A}}, \mathcal{A}$ mb

sea $B_j \in \mathcal{A}_j$, ent

$$\pi_j^{-1}(B_j) = X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times B_j \times \cdots \times X_n$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\bigcup_{k_1, k_2, \ldots, k_n = 1}^{\infty} B_{1k_1} \times B_{2k_2} \times \cdots \times B_{j-1\,k_{j-1}} \times B_j \times \cdots \times B_{nk_n}}_{\in \overline{\mathcal{A}}}$$

Entonces $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n \subseteq \bar{\mathcal{A}}$

corolario: $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j$ es generado por

$\{ A_1 \times \cdots A_n : A_j \in \mathcal{A}_j \}$.

ejemplo:

$I = \{ [a,b) : a \leq b \}$

$I^n = \{ [a,b) : a, b \in \mathbb{R}^n, \ a \leq b \}$

$\mathcal{B}$ = σ-álgebra de Borel. Por el teorema anterior, I^n genera $\mathcal{B}^n = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_j$. se tiene que $\mathcal{B}^n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

puesto que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{B}^n$$

si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, U es la unión contable de I^n, entonces I^n genera $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{B}^n$.

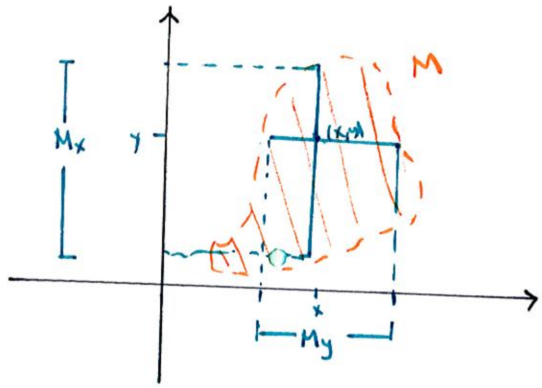
Ahora bien, $\mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, pues cada elemento en I^n es intersección contable de conjuntos abiertos y cada uno de ellos pertenece a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

def: si $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ son esp. mb. si $A \subseteq X \times Y$, $x \in X$, $y \in Y$, entonces

$$A_x := \{ y \in Y : (x,y) \in A \}$$
$$A_y := \{ x \in X : (x,y) \in A \}$$

teorema: sean $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ mb y $M \overset{mb}{\subseteq} X \times Y$ y $x \in X$, $y \in Y$, entonces $M_x \in \mathcal{B}$ y $M_y \in \mathcal{A}$

7.10.2014



dem: sea $\Sigma := \{ S \subseteq X \times Y : S_y \in \mathcal{A} \}$

claramente, si $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$, $(A \times B)_y = \begin{cases} \emptyset & \text{si } y \notin B \\ A & \text{si } y \in B \end{cases} \in \mathcal{A}$

Entonces $A \times B \in \Sigma$. Como $\{ A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \}$ genera la σ-álgebra $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, basta probar que Σ es una σ-álgebra.

Para esto:

i. sea $S \in \Sigma$, entonces $((X \times Y) \setminus S)_y = X / \overbrace{S_y}^{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$

Entonces $(X \times Y) \setminus S \in \Sigma$

ii. $(X \times Y)_y = X \in \mathcal{A}$, ent $X \times Y \in \Sigma$

iii. sean $(S_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \Sigma$. Entonces

$$\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \right)_y = \bigcup_{j=1}^{\infty} \overbrace{(S_j)_y}^{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

Entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \in \Sigma$. por i, ii, iii, Σ es una Σ álgebra.

teorema: sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos. sea $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, entonces

$$\left.\begin{aligned} &: X \longrightarrow [0, \infty] \\ &\quad x \longmapsto \nu(M_x) \\ &: Y \longrightarrow [0, \infty] \\ &\quad y \longmapsto \mu(M_y) \end{aligned}\right\} \text{ son mb}$$

y $\int_X \nu(M_x)\, d\mu = \int_Y \mu(M_y)\, d\nu$

dem:

PASO 1: [illegible]

y la unión sea disjunta [illegible]

$$\chi_M = \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j}\,\chi_{B_j}$$

[illegible]

$\nu(M_x) = \int_Y$ [illegible]

$$\nu(M_x) = \int_Y \sum_{j=1}^{n} [\text{illegible}]\, d\nu$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_Y \chi_{A_j}(x)\, \chi_{B_j}\, d\nu$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j}(x) \int_Y \chi_{B_j}\, d\nu$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j}(x)\, \nu(B_j) = \sum_{j=1}^{n} \nu(B_j)\, \chi_{A_j}(x)$$

[illegible] $\nu(M_x) = \sum_{j=1}^{n} \nu(B_j)\, \chi_{A_j}$ [illegible]

simple [illegible] $\nu(M_x)$ [illegible]

De manera análoga, [illegible] $\mu(M_y) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\, \chi_{B_j}$ [illegible]

y $\int_X \nu(M_x)\, d\mu = \int_X \sum_{j=1}^{n} \nu(B_j)\, \chi_{A_j}\, d\mu = \sum_{j=1}^{n}$ [illegible] y

$\int_Y \mu(M_y)\, d\nu = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\, \nu(B_j)$ [illegible]

PASO 2: Sea $\Sigma = \{ M \subseteq X \times Y :$ [illegible] $\}$

[illegible] $\bigcup_{j=1}^{n} (A_j \times B_j)$: [illegible] $\subseteq \Sigma$

[illegible] paso 1, [illegible] $\mathcal{A}$ [illegible]

[illegible] sencillo. [illegible] que [illegible]

[illegible] que [illegible] clase monótona

1. Sean $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq$ [illegible] M [illegible]

$M_k \in \Sigma$, queremos probar que $M \in \Sigma$.

sea $x \in X$, $(M_1)_x \subseteq (M_2)_x \subseteq \dots \subseteq M_x = \bigcup_{j=1}^{\infty} (M_j)_x$

entonces, $\forall j \in \mathbb{N}$, $x \longmapsto \nu((M_j)_x)$ es mb. entonces,

$$x \longmapsto \nu(M_x)$$

es mb, porque el límite de funciones mbs. De manera análoga, $\forall y \in Y$, $y \longmapsto \mu(M_y)$ es mb. Ahora bien,

$$\int_X \underbrace{\nu(M_x)}_{\geq 0} d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} \nu((M_n)_x)\, d\mu$$

$$\overset{\text{conv monot}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X \nu((M_n)_x)\, d\mu$$

$$\overset{M_n \in \Sigma, \text{ ent satisfacen la prop del 90}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_Y \mu((M_n)_y)\, d\nu$$

$$\overset{\text{conv mon}}{=} \int_Y \lim_{n\to\infty} \mu((M_n)_y)\, d\nu$$

Entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \in \Sigma$

2. $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \dots \supseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j := M$

si $\mu(X) < \infty$, $\nu(Y) < \infty$, ent $\mu(M_y) = \lim_{n\to\infty} \mu((M_n)_y)$

y $\nu(M_x) = \lim_{n\to\infty} \nu((M_n)_x)$.

entonces $M \in \Sigma$ como antes, usando el teorema de lebesgue

3. si no necesariamente $\mu(X) < \infty$ o $\nu(Y) < \infty$. sea $(S_k)_k \subseteq \mathcal{A}$, $(T_k)_k \subseteq \mathcal{B}$ tq $\forall k$: $\mu(S_k) < \infty$, $\nu(T_k) < \infty$ y $\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k = X$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k = Y$. entonces

$$X \times Y = \bigcup_{\substack{j=1 \\ k=1}}^{\infty} S_k \times T_j \quad \Big\} \text{ sin restricción, disjuntos}$$

entonces $M = \bigcup_{j,k=1}^{\infty} M \cap (S_k \times T_j)$. luego, $\forall k \in \mathbb{N}$, $M \cap (S_k \times T_k) \in \Sigma$ por 2 y ent $M \in \Sigma$ por 1

9 · 10 · 2019

teorema y definición: sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos. Entonces $\exists! \ \mu \otimes \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow [0, \infty]$ tq $\forall A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, $\mu \otimes \nu (A \times B) = \mu(A) \nu(B)$ y además $\mu \otimes \nu$ se llama medida del producto y $\forall M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$,

$$\mu \otimes \nu (M) = \int_X \left(\int_Y \chi_{M_x} \, d\nu \right) d\mu = \int_X \nu(M_x) \, d\mu$$

$$= \int_Y \left(\int_X \chi_{M_y} \, d\mu \right) d\nu = \int_Y \mu(M_y) \, d\nu$$

dem:

1. Existencia y unicidad:

$H := \{ A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \}$ es un semianillo y

$$\circledast \ (A \times B) \longmapsto \mu(A) \mu(B)$$

es un contenido

sean $(S_k)_k \subseteq \mathcal{A}$, $(T_k)_k \subseteq \mathcal{B}$ tq $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots$,

$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$, $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots$; $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$

Entonces, $X \times Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \times T_k$ y $(S_k \times T_k) \longmapsto \mu(S_n) \nu(T_k) < \infty$,

Es decir, $X \times Y$ es σ finito respecto a $\circledast$. Entonces por el teorema de Hahn, tiene una extensión única a $\sigma(H) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

2. Es una medida:

si $M = A \times B$.

$$\int_X \left(\int_X \chi_{M_x} \, d\nu \right) d\mu = \mu(A) \nu(B).$$

Ahora vamos a probar que $\circledast$ es una medida. Defina

$$\varphi : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow [0, \infty]$$

$$M \longmapsto \int_X \nu(M_x) \, d\mu$$

Entonces $\varphi(\emptyset) = \int_X 0 \, d\mu = 0$. sea $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, ent

$\varphi(M) = \int_X \underbrace{\nu(M_x)}_{\geq 0} d\mu \geq 0$ Veamos que es σ-aditiva.

sean $(M_j)_j \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ disjuntos entre sí a pares. sea

$$M := \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$$

Entonces $\varphi(M) = \int_X \nu(M_x) d\mu = \int_X \nu\left(\dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}} M_j\right)_x d\mu$ proy son disjuntas

$$= \int_X \sum_{j=1}^{\infty} \nu(M_j)_x \, d\mu$$

conv monótona

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \nu(M_{jx}) \, d\mu$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(M_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu \otimes \nu(M_j)$$

Por inducción: $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ espacios de medida σ-finitos Entonces:

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n \quad y \quad \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$$

obs: si μ, ν son medidas completas, entonces $\mu \otimes \nu$ no necesariamente no es completo

ej: $\mu, \nu = \lambda(\mathbb{R})$ y $M \subseteq \mathbb{R}$ conjunto no lebesgue mb. sea $A = \{(x,0) : x \in M\} = M \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ y $A \subseteq \mathbb{R} \times \{0\}$. se puede mostrar que $\lambda \otimes \lambda(\mathbb{R} \times \{0\}) = 0$. Entonces A es despreciable, pero $A_0 = M \subseteq \mathbb{R}$ no es mb, ent $A \notin \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

Teorema de Tonelli: sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos. sea $f: X \times Y \longrightarrow [0, \infty]$, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ - mb.

Entonces
$: X \longrightarrow [0, \infty]$, $x \longmapsto \int_Y f(x,y) dy$
$: Y \longrightarrow [0, \infty]$, $y \longmapsto \int_X f(x,y) dx$

están bien def y son mbs y

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu \right) d\nu$$

$$= \int_{X\times Y} f \, d(\mu\otimes\nu)$$

dem:

Note que:

$$\cdot : Y \longrightarrow [0,\infty]$$
$$y \longmapsto f(x,y)$$

es mb $\forall x$, pues si $M \subseteq [0,\infty]$ es mb, ent

$$[f(x,\cdot)]^{-1}(M) = (\underbrace{f^{-1}(M)}_{\in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}})_x \in \mathcal{B}$$

Ahora bien, si $f = \chi_M$ para un $M \subseteq \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, entonces

$$\int_Y f(x,y)\, d\nu = \int_Y \chi_M(x,y)\, d\nu \qquad (x \text{ es fijo})$$

$$= \nu(M_x)$$

Entonces $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu$ es mb. De manera análoga, $y \longmapsto \int_X f(x,y)\, d\mu = \mu(M_y)$ es mb y $\int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu \right) d\mu$

$$= \int_X \nu(M_x)\, d\mu = \int_Y \mu(M_y)\, d\nu = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu \right) d\nu = \mu\otimes\nu(M)$$

$$= \int_{X\times Y} \chi_M \, d(\mu\otimes\nu) = \int_{X\times Y} f \, d(\mu\times\nu)$$

Entonces el teorema vale para funciones características de conjuntos mbs. Entonces vale también para funciones $\varphi \in E^+(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$.

Ahora, sea $f : X \times Y \longrightarrow [0, \infty]$ mb y sean $(s_j)_j \subseteq E^+(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ tq

$$s_1 \leq s_2 \leq \quad \leq f$$

y $s_j \longrightarrow f$ puntualmente Ent

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) \overset{\text{conv. mon}}{=} \lim_{j \to \infty} \int_{X \times Y} s_j \, d(\mu \otimes \nu)$$

$$= \lim_{j \to \infty} \int_X \left(\int_Y s_j \, d\nu \right) d\mu$$

conv. monótona

$$= \int_X \left(\lim_{j \to \infty} \int_Y s_j \, d\nu \right) d\mu$$

$$= \int_X \left(\int_Y \lim_{j \to \infty} s_j \, d\nu \right) d\mu$$

$$= \int_X \left(\int_Y f \, d\nu \right) d\mu$$

análogo, $\displaystyle\int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \left(\int_X f \, d\mu \right) d\nu$

Teorema de Fubini: sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos, si

i. $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ es integrable $\mu \otimes \nu$

Entonces, $f(x, \cdot)$ es ν-integrable μ a.e $x \in X$ y
$A := \{ x \in X : f(x, \cdot) \text{ no es } \nu\text{-integrable} \} \in \mathcal{A}$.
Para $f(\cdot, y)$, se tiene que $f(\cdot, y)$ es μ-integrable

vale y y [illegible] f [illegible] integrable [illegible] B

y $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu$, $y \longmapsto \int_X f(x,y)\,d\mu$ [illegible]

integrables sobre X/A, Y/B y

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) = \int_{X/A}\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu\right)d\mu = \int_{Y/B}\left(\int_X f(x,y)\,d\mu\right)d\nu$$

ii. $f : X\times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ mb. [illegible] e:

una de las siguientes [illegible]

[illegible] $\int$ [illegible]

entonces f es integrable [illegible]

dem:

ii). [illegible]

[illegible]

i). si f [illegible] $|f|$ [illegible]

$\forall x \in X$: $f(\cdot, x)$ mb

[illegible] $\int_Y |f(x,y)|\,d\nu = \infty$ [illegible]

$= \left(\int_Y \right.$ [illegible]

lo mismo para B [illegible]

[illegible] ≥ 0.

[illegible]

[illegible] $\int f(x,\cdot)\,d\nu$ es integrable en X/A y

$$\int_{X\setminus A}\left(\int_Y f(x,y)\,dv\right)d\mu = \int_{X\setminus A}\left(\int_Y (Re f)_+\,dv\right)d\mu$$
$$-\int_{X\setminus A}\left((Re f)_-\,dv\right)d\mu + i\ldots$$

$$= \int_X\left(\int_Y (Re f)_+\,dv\right)d\mu - \int_X\left(\int_Y (Re f)_-\,dv\right)d\mu + i\ldots$$

Tonelli

$$= \int_{X\times Y} (Re f)_+\,d(\mu\otimes v) - \int_{X\times Y} (Re f)_-\,d(\mu\otimes v) + i\ldots$$

$$= \int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes v)$$

notación: se escribe

$$\int_{X\setminus A}\int_Y f(x,y)\,dv\,d\mu = \int_X\int_Y f(x,y)\,dv\,d\mu \quad , \text{ pues } \mu(A)=0$$

y la integral $\int_A\int_Y f(x,y)\,dv\,d\mu = 0$

corolario: sea $(a_{jk})_{jk} \subseteq [0,\infty]$, entonces

$$\sum_{j,k} a_{jk} = \sum_j\left(\sum_k a_{jk}\right)$$
$$= \sum_k\left(\sum_j a_{jk}\right)$$

teorema de transformación:

integración con respecto a una medida de imagen (image measure):

teorema y definición: sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida, $(Y,\mathcal{B})$ un espacio medible, $T: X\longrightarrow Y$ mb

Entonces $V: \mathcal{B} \longrightarrow [0,\infty]$, $V(B) = \mu(T^{-1}(B))$ es una medida sobre Y y se denomina image of μ under T, y se denota $V = T(\mu)$.

dem: V está bien def

a. $V(\emptyset) = \mu(T^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = \emptyset$

b. $\forall M \in \mathcal{B}$, $V(B) = \mu(T^{-1}(B)) \geq 0$

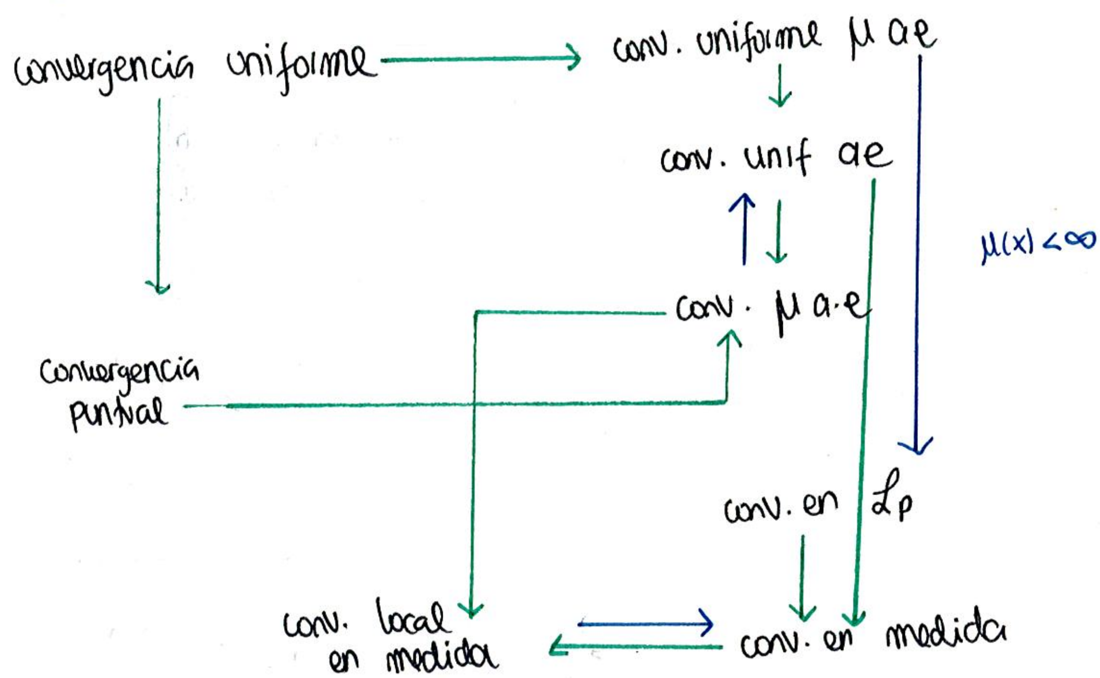
c. $(M_j)_j \subseteq \mathcal{B}$ por disjuntos, ent

$$V\left(\dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}} M_j\right) = \mu\left(T^{-1}\left(\dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}}\right)\right) = \mu\left(\dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}} T^{-1}(M_j)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(T^{-1}(M_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} V(M_j).$$

14.10.2014

convergencias:



ejemplos importantes:

a. funciones afines de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Recall: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es afín ssi $\exists c \in \mathbb{R}^n$, $\exists A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tq $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + c$

f es biyectiva ssi:

i. A es biyectiva

ii. $0 \neq \det A := \det f$

notaciones:

$I^n := \{ [a,b) : a \leq b,\ a,b \in \mathbb{R}^n \}$ semi-anillo.

$\mathcal{B}^n :=$ σ-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}^n$ (generada por I^n)

$\mathcal{L}^n :=$ σ-álgebra de Lebesgue (completación de $\mathcal{B}^n$)

$\beta^n :=$ medida de Borel

$\lambda^n :=$ medida de Lebesgue

teorema: sea $c \in \mathbb{R}^n$ y sea $T_c : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \longmapsto x + c$

i. T_c es $\mathcal{B}^n - \mathcal{B}^n$ mb.

$T_c(\beta^n) = \beta^n$ (β^n es invariante bajo transl.)

ii. T_c es $\lambda^n - \lambda^n$ mb y $T_c(\lambda^n) = \lambda^n$

iii. si μ es una medida invariante bajo traslación en $\mathcal{B}^n$, con $\mu([0,1]^n) = 1$, entonces $\mu = \beta^n$.

dem:

i. T_c es continua, ent es mb. Ahora, sean $a, b \in \mathbb{R}^n$ con $a \leq b$. Entonces

$$
\begin{aligned}
(T_c \beta^n)([a,b)) &= \beta^n(T_c^{-1}[a,b)) \\
&= \beta^n([a-c, b-c)) \\
&= \prod_{j=1}^{n} (b_j - c_j - (a_j - c_j)) \\
&= \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \\
&= \beta^n([a,b))
\end{aligned}
$$

Entonces $T_c\beta^n$ y β^n son medidas sobre I^n. como I^n es σ-finita con resp. a β^n y $T_c\beta^n$, entonces $\beta^n, T_c\beta^n$

tienen extensión ... λ^n, así la ... medida

ii. Sea $M \in \mathcal{L}^n$ así $\exists A \in \mathcal{B}^n$, $C \in \mathcal{B}^n$,

$D \in \mathcal{L}^n$, $D \subseteq C$ tq

$\lambda^n(C) = \beta^n(C) = 0$, $M = A \cup D$. Así

$$T_c^{-1}(M) = T_c^{-1}(A \cup D) = \underbrace{T_c^{-1}(A)}_{\in \mathcal{B}^n} \cup \underbrace{T_c^{-1}(D)}_{\subseteq T_c^{-1}(C)}$$

Tenemos $T_c \in \mathcal{L}^n$ y es $\lambda^n - \lambda^n$ mb. Además

$$T_c \lambda^n(M) = \lambda^n(T_c^{-1}(M)) = \lambda^n(T_c^{-1}(A) \cup T_c^{-1}(D))$$

$$= \lambda^n(T_c^{-1}(A) \cup T_c^{-1}(D))$$

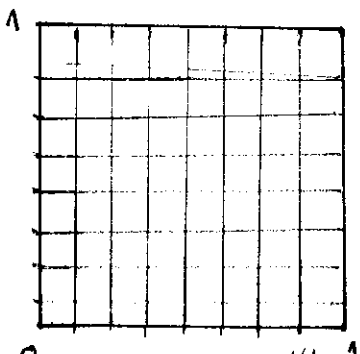
$$= \lambda^n(T_c^{-1}(A)) + \lambda^n(T_c^{-1}(D))$$

$$= \lambda^n(A)$$

$$= \lambda^n(M)$$

iii. Sea $\mu : \mathcal{B}^n \longrightarrow [0, \infty]$ medida invariante bajo translaciones con $\mu([0,1)^n) = 1$

Sean $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$



$$1 = \mu([0,1)^n)$$

$$= \mu\left(\bigcup_{j_1=1}^{d_1} \bigcup_{j_2=1}^{d_2} \cdots \bigcup_{j_n=1}^{d_n} \left[\frac{j_1 - 1}{d_1}, \frac{j_1}{d_1}\right) \times \cdots \times \left[\frac{j_n - 1}{d_n}, \frac{j_n}{d_n}\right) \right)$$

$$= \prod_{j=1}^{n} d_j \, \mu\left(\left[0, \frac{1}{d}\right)\right)$$

$$= \mu\left(\left[0, \frac{1}{d}\right)\right) = \beta^n\left(\left[0, \frac{1}{d}\right)\right)$$

así $\mu(M) = \beta^n(M)$ $\forall M \in \{[a,b) : a, b \in \mathbb{Q}^n, a < b\} = \mathcal{I}_{\mathbb{Q}}$

Como $I_{\mathcal{Q}}^n$ genera $\mathcal{B}^n$, se tiene que

$$\mu = \beta^n$$

y análogo para la medida de Lebesgue.

Corolario: si μ es una medida invariante sobre β^n bajo translación y $\mu([0,1[^n) = \alpha < \infty$, entonces $\mu = \alpha\beta^n$

dem:

si $\alpha = 0$, $\mu(\mathbb{R}^n) = 0$, $\mu = 0\beta^n$

si $\alpha \neq 0$, $\frac{1}{\alpha}\mu$ es una medida sobre $\mathcal{B}^n$ y $1/\alpha\, \mu([0,1)^n) = 1$, es decir $1/\alpha\, \mu = \beta^n$.

teorema: sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ afín biyectiva, $f(x) = Ax + C$ ($\det A \neq 0$). Entonces f es $\mathcal{B}^n - \mathcal{B}^n$ medible ($\mathcal{L}^n - \mathcal{L}^n$ mb) y $f(\beta^n) = |\det f|^{-1}\beta^n$ y $f(\lambda^n) = |\det f|^{-1}\lambda^n$.

dem: sin restricción, $c = 0$, pues $f = T_c \circ A$. claramente f es continua, ent es mb y $f(\beta^n)$ está bien definida. Veamos ahora que $f(\beta^n)$ es invariante bajo translación. Sean $d \in \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathcal{B}^n$. Entonces

$$
\begin{aligned}
T_d(f(\beta^n))(D) &= f(\beta^n)(T_d^{-1} B) \\
&= \beta^n(A^{-1} T_d^{-1}(B)) \\
&= \beta^n(A^{-1}(B - d)) \\
&= \beta^n(A^{-1}B - A^{-1}d) \\
&= \beta^n(A^{-1}B) \quad \text{) } \beta^n \text{ es invariante bajo translación} \\
&= f(\beta^n)(B)
\end{aligned}
$$

Es decir, $\exists \alpha$ cte tq $f(\beta^n) = \alpha\beta^n$. Note que esto funciona, pues

$$f(\beta^n)([0,1]^n) = \beta^n(\underbrace{\overset{\uparrow}{A^{-1}}\overset{\downarrow}{[0,1]^n}}_{\text{compacto}}) < \infty$$

continua compacto

compacto $\Rightarrow$ closed and bonded.

16 - 10 - 2014

Entonces, $\exists \alpha > 0$ tq $f(\beta^n) = \alpha \beta^n$. Como podemos asumir sin restricción que $c = 0$, entonces:

Caso 1, A es unitario: $AA^* = A^*A = \mathbb{1}$.

Sea $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, ent

$$f(\beta^n)(M) = \beta^n(\underbrace{f^{-1}(M)}_{M,\text{ As es rotación}}) = \beta^n(M) = \alpha \beta^n(M)$$

Entonces $\alpha = 1$ y se tiene que $\alpha = 1 = |\det A|^{-1}$.

Caso 2, $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$: como $\exists \alpha > 0$ tq $\alpha \beta^n([0,1)^n)$

$$= f(\beta^n)([0,1]^n) = \beta^n(f^{-1}([0,1)^n) = \beta^n([0,\tfrac{1}{\lambda_1}) \times \cdots \times [0,\tfrac{1}{\lambda_n}))$$

$$= \frac{1}{|\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_2|} = \frac{1}{|\det A|}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{|\det A|}$$

Caso 3, $A \in GL_n(\mathbb{R})$: Notemos que

AA^* es simétrica y positiva, es decir $\forall x, \langle AA^*x, x\rangle \geq 0$.

Entonces existe V ortogonal tq $AA^* = VD^2V^*$, donde D es diagonal y positiva. Note que de la igualdad anterior, tenemos que:

$$D^{-1}V^*A = DV(A^*)^{-1}$$

Entonces si $W = D^{-1}V^*A$, se tiene que W es ortogonal, pues $WW^* = D^{-1}\underbrace{V^*A(A^*V}_{D^2}D^{-1}) = \mathbb{1}$

$\omega^* \omega = \quad = \mathbb{1}$. Es decir, $A = VDW$ y en particular, $|\det A| = |\det D|$. Ahora, sabemos que $\forall M \in \mathcal{B}^n$:

$$\alpha\beta^n(M) = f(\beta^n)(M) = \beta^n(f^{-1}(M)) = \beta^n(\omega^{-1}D^{-1}V^{-1}(M))$$

$$= (\omega\beta^n)(D^{-1}V^{-1}(M)) \quad \text{caso 1}$$

$$= \beta^n(D^{-1}V^{-1}(M))$$

$$= (D\beta^n)(V^{-1}(M)) \quad \text{caso 2}$$

$$= \frac{1}{|\det D|}\beta^n(V^{-1}(M))$$

$$= \frac{1}{|\det D|}(V\beta^n)(M) \quad \text{caso 1}$$

$$= \frac{1}{\det D}\beta^n(M)$$

Entonces $\alpha = \dfrac{1}{|\det A|} = \dfrac{1}{|\det D|} = \dfrac{1}{|\det f|}$

Corolario: Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ afín y biyectiva. Entonces, $\forall A \in \mathcal{B}^n$, $f(A) \in \mathcal{B}^n$ y $\beta^n(f(A)) = |\det f|\, \beta^n(A)$. Además, $\forall B \in \mathcal{L}^n$, $f(A) \in \mathcal{L}^n$ y $\lambda^n(f(A)) = |\det f|\, \lambda^n(A)$.

fórmula de transformación:

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel medibles. Definimos

$$\mathcal{B}^n_X := \mathcal{B}^n|_X, \quad \beta^n_X := \beta^n|_X$$

Si X es Lebesgue-medible:

$$\mathcal{L}^n_X = \mathcal{L}^n|_X, \quad \lambda^n_X = \lambda^n|_X$$

Recall: Sean $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos, $\varphi: X \longrightarrow Y$ es C^1-difeomorfismo si φ es biyectiva y φ, φ^{-1} son C^1, dif con derivada continua.

obs: si $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos, $\varphi: X \to Y$ C^1 difeomorfismo, aunque un homeomorfismo es suficiente, entonces $\mathcal{B}_Y^n = \varphi(\mathcal{B}_X^n) = \{\varphi(A) : A \in \mathcal{B}_X^n\}$. lo anterior, pues φ, φ^{-1} existen y son continuas y los abiertos en Y generan $\mathcal{B}_Y^n$ y los abiertos en X generan $\mathcal{B}_X^n$.

Recall: sean X, Y abiertos en $\mathbb{R}^n$, $\varphi: X \to Y$ C^1. sean $x_1, x_2 \in X$ tq $\forall \lambda \in [0,1]$, $x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \in X$, entonces:

$$\|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\| \sup_{\lambda \in [0,1]} \{\|D\varphi(x_2 + \lambda x_2)\|\}$$

dem:

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \left|\int_0^1 \frac{d}{d\lambda} \varphi(x_1 + \lambda(x_2 - x_1))\, d\lambda\right|$$

$$= \left|\int_0^1 D\varphi(x_1 + \lambda(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)\, dx\right|$$

$$\leq \int_0^1 \|D\varphi(x_1 + \lambda(x_2 - x_1))\| \|x_2 - x_1\|\, d\lambda$$

teorema (teorema de transformación): sean $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos, $\varphi: X \to Y$ C^1 difeomorfismo. Entonces

i. $\forall A \in \mathcal{B}_X^n$, $\beta^n(\varphi(A)) = \int_A |\det D\varphi|\, d\beta^n$

ii. si $f: Y \to [0, \infty]$ mb, ent $\int_Y f\, d\beta^n = \int_X (f \circ \varphi |\det D\varphi|)\, d\beta^n$.

iii. $f: Y \to \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$. Entonces, $f \in \mathcal{L}_1(Y)$ ssi $(f \circ \varphi) \cdot \det D\varphi \in \mathcal{L}_1(X)$ y en este caso

$$\int_Y f\, d\beta^n = \int_X (f \circ \varphi) |\det D\varphi|\, d\beta^n$$

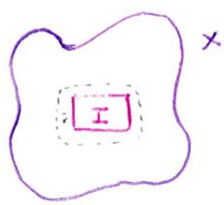
dem: sea $\varepsilon > 0$

sea $H = \{ [a,b) : a \leq b, \ [a,b] \subseteq X, \ a,b \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \mathbb{Z}^n \}$

H es un semianillo que genera a $\mathcal{B}^n_X$.

Paso 1: sea $I \in H$. Vamos a probar que:

$$\beta^n(\varphi(I)) \leq \int_I |\det D\varphi| \, d\beta^n.$$



$I \subseteq X \implies \overline{I} \subseteq X$, ent $\exists r_1 > 0$ tq $\forall a \in \overline{I}$, $\overline{B_r(a)} \subseteq X$. como $D\varphi$, $D\varphi^{-1}$ son continuas en X. sea

$M := \sup\{ \|D\varphi(x)^{-1}\| : x \in \overline{I} \} < \infty$

lo anterior, pues $D\varphi(x)^{-1}$ es continua en el compacto $\overline{I}$.

Entonces, $\exists r \leq r_1$ tq $\forall a \in \overline{I}$, $\overline{B_r(a)} \subseteq X$ y $\forall x \in \overline{I}$, $\forall y \in X$ con $\|x-y\| < r$, $\|D\varphi(x) - D\varphi(y)\| < \frac{\varepsilon}{M\sqrt{n}}$

lo anterior se tiene por continuidad uniforme.

Escriba, $I = \dot{\bigcup}_{\nu=1}^{s} I_\nu$ tq todos los I_ν tienen la misma longitud δ en sus lados y $\delta < r/\sqrt{n}$.

Note que $I_\nu = [0, \delta)^n + \vec{k}$.

Existe porque mi cubo es compacto.

$\forall \nu$, tome $b_\nu \in \overline{I_\nu}$ tq $\forall y \in I_\nu$, $|\det D\varphi(b_\nu)| \leq |\det D\varphi(y)|\}$ $\forall x \in \overline{I_\nu}$: $\|b_\nu - x\| < r$. Por el teorema del valor medio aplicado a $x \longmapsto \varphi(x) - D\varphi(b_\nu)x$

a tener en cuenta: $\forall b \in I_\nu$: $\overline{I_\nu} \subseteq \overline{B_1(b)} \subseteq X$

Siguiendo con el argumento, tenemos que.

$$\|\varphi(x) - D\varphi(b_\nu)x - [\varphi(b_\nu) - D\varphi(b_\nu)b_\nu]\|$$

$$\leq \|x - b_\nu\| \sup_{\lambda \in [0,1]} \{ \|D\varphi(x + \lambda(b_\nu - x)) - D\varphi(b_\nu)\| \}$$

$$\leq \|x - b_\nu\| \frac{\varepsilon}{M\sqrt{n}} \leq \varepsilon\delta/M$$

[illegible] $\varphi(b_v) + D\varphi(b_v)(x - b_v) + k\,\varepsilon B_M(0)$ [illegible]

$= \varphi(b_v) + D\varphi(b_v)(x - b_v) + k\,\varepsilon B_M(0)$ [illegible]

$= \varphi(b_v) + D\varphi(b_v)[\,x - b_v + D\varphi(b_v)^{-1}(k\,\varepsilon B_M(0))\,]$ [illegible]

$\subset \varphi(b_v) - D\varphi(b_v) b_v + D\varphi(b_v)[\,I_v - \ldots\,]$

[illegible] $2\varepsilon\delta$

[illegible] $\varphi(b_v) + D\varphi(b_v) x$ [illegible]

[illegible]

Luego $\beta^n(\varphi(I_v)) \le \beta^n(\varphi(b_v) + D\varphi(b_v) \ldots)$ [illegible]

$\beta^n(\varphi(I_v)) \le |\det D\varphi(b_v)| \ldots$ [illegible]

$\le |\det D\varphi(b_v)| \ldots$ [illegible]

$$\beta^n(\varphi(I)) \le \sum_v \beta^n(\varphi(I_v))$$

$$\le \sum_v (1+2\varepsilon)^n |\det D\varphi(b_v)|\,\beta^n(I_v)$$

$$= \sum_v (1+2\varepsilon)^n \int_{I_v} |\det D\varphi(b_v)|\,d\beta^n$$

$$\le (1+2\varepsilon)^n \sum_v \int_{I_v} |\det D\varphi(x)|\,d\beta^n$$

$$= (1+2\varepsilon)^n \int_I |\det D\varphi|\,d\beta^n.$$

[illegible]

Paso 2:

Vamos a probar que $\forall A \in \mathcal{B}_X$, $\beta^n(\varphi(A)) \le \int_A |\det(D\varphi)|\,d\beta^n$

con $\mu_1 : \mathcal{B} \to [0,\infty]$, $\mu_1(I) = \beta^n(\varphi(I))$,

$\mu_2 : \mathcal{B} \to [0,\infty]$, $\mu_2(I) = \int_I |\det D\varphi|\,d\beta^n$ [illegible]

σ- finitos, $\mu_1 \leq \mu_2$, ent hay extensión única t.q.

$$\mu_1^* = \mu_2^*$$

lo anterior, por unicidad de las extensiones de μ_1 y μ_2 a $\mathcal{B}_X^n$.

Paso 3: sea $f: Y \to [0,\infty]$ medible. Queremos probar que $\int_Y f \, d\beta^n \leq \int_X (f\circ\varphi)\,|\det D\varphi|\, d\beta^n$.

sea $f = \chi_B$, con $B \in \mathcal{B}_Y^n$. Entonces

$$\int_Y f \, d\beta^n = \int_Y \chi_B \, d\beta^n = \beta^n(B) = \beta^n(\varphi(\varphi^{-1}(B)))$$

$$\leq \int_{\varphi^{-1}(B)} |\det D\varphi| \, d\beta^n = \int_X \chi_{\varphi^{-1}(B)} |\det D\varphi| \, d\beta^n$$

$$= \int_X \chi_B \circ \varphi \, |\det D\varphi| \, d\beta^n$$

Ent tenemos que la afirmación vale para f simples positivas. Ahora, si $f: Y \to [0,\infty]$, tomo $s_n \in \mathcal{E}^+(Y, \mathcal{B}_Y^n)$ t.q. $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$, $s_n \to f$. Ent

$$\int_Y f \, d\beta^n \underset{\text{conv mon}}{=} \lim_{m\to\infty} \int s_m \, d\beta^n$$

$$\leq \lim_{m\to\infty} \int (s_m \circ \varphi)\,|\det D\varphi|\, d\beta^n$$

$$\underset{\text{conv mon}}{=} \int (f\circ\varphi)\,|\det D\varphi|\, d\beta^n$$

Paso 4: Tome la afirmación con igualdad y aplique el que probamos en 3 con φ^{-1} en vez de φ y

$(f\circ\varphi)\,|\det D\varphi|$ en vez de f.

teorema de Sard: sean $Y, X \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos y

$$\varphi : X \longrightarrow Y \quad C^1$$

sea $C := \{x \in X : \det(D\varphi(x)) = 0\}$, entonces

$$\beta^n(\varphi(C)) = 0.$$

28.10.2014

teorema de Representación de Riez:

obs: Aquí, todos los espacios topológicos son Hausdorff, porque en un Hausdorff los compactos son cerrados y ent los compactos están en la σ álgebra de Borel.

Medidas de Borel y de Radon:

def: sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. $\mathcal{B}(X)$ la σ álgebra de Borel sobre X, es decir la σ-álgebra generada por los abiertos en X

def: sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mu : \mathcal{B}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ una medida. μ se denomina **medida de Borel** si $\mu(K) < \infty$ para cada compacto $K \subseteq X$.

μ se denomina **localmente finita** si $\forall x \in X$, $\exists$ vecindad V t.q. $\mu(V) < \infty$

μ se denomina **inner regular** ssi $\forall B \in \mathcal{B}(X)$,
$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \text{ es compacto}, K \subseteq B\}$.

μ se denomina **outer regular** ssi $\forall B \in \mathcal{B}(X)$,
$\mu(B) = \inf\{\mu(U) : U \text{ es abierto y } U \supseteq B\}$