12·9·2014

teorema de convergencia dominada: sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $s \in \mathcal{L}_1(X, \mathbb{R})$, $s \geq 0$ y $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f_n : X \to \mathbb{R}, \text{ mbs.}$$
$$f : X \to \mathbb{R}, \ f \text{ mb}$$

$f_n \to f$ μ AE.

$\forall n \in \mathbb{N}: |f_n| \leq s$, μ. AE.

Entonces $f \in \mathcal{L}_1(X)$ y $\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu$

dem: Definimos, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$A_n^+ := \{x \in X : f_n(x) > s(x)\}$$
$$A_n^- := \{x \in X : f_n(x) < -s(x)\}$$

$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: A_n^{\pm}$ es mb y $\mu(A_n^{\pm}) = 0$

$\longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} A^+ := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^+ \cup \{x \in X : f_n(x) \not\to f(x)\} \\ A^- := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^- \cup \{x \in X : f_n(x) \not\to f(x)\} \end{array}\right\}$ son mb

y $\mu(A^{\pm}) = 0$

sea $\varphi_n(x) := \begin{cases} 0 & x \in A^+ \\ s(x) - f_n(x), & x \notin A^+ \end{cases}$

sea $\psi_n(x) := \begin{cases} 0, & x \in A^- \\ s(x) + f_n(x), & x \notin A^- \end{cases}$

$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, φ_n, ψ_n son mb y ≥ 0

$\forall x \in X \setminus A^+$, en $\varphi_n(x) = s(x) - f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} s(x) - f(x) \geq 0$

$\forall x \in X \setminus A^-$, en $\psi_n(x) = s(x) + f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} s(x) + f(x) \geq 0$

$\longrightarrow \forall x \in X \setminus (A^+ \cup A^-)$, $|f(x)| \leq s(x)$

$$\Longrightarrow \int_X |f| d\mu \leq \int_X s\, d\mu < \infty$$

$$\longrightarrow f \in \mathcal{L}_1(X)$$

Ahora, veamos que $\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu$

$$\begin{aligned}
\int_X (s(x) - f(x))\, d\mu &= \int_X \liminf (s - f_n)\, d\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X s\, d\mu - \int_X f_n\, d\mu \\
&= \int_X s\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu
\end{aligned}$$

Además,
$$\begin{aligned}
\int_X (s + f)\, d\mu &= \int_X \liminf_{n\to\infty} (s + f_n)\, d\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (s + f_n)\, d\mu \\
&= \int_X s\, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu
\end{aligned}$$

$$\longrightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \leq \int_X s\, d\mu - \int_X (s - f)\, d\mu$$

$$\begin{aligned}
\longrightarrow \limsup \int_X f_n\, d\mu &\leq \int_X f\, d\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu
\end{aligned}$$

$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$ existe y

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

Corolario: sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $S : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, $S \in \mathcal{L}_1(X)$, $f_n : X \to \mathbb{C}$ mb, $f_n \in \mathcal{L}_1(X)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $f : X \xrightarrow{mb} \mathbb{C}$ tq $f_n \to f$ μ AE, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| < S$ μ AE

Entonces $f \in \mathcal{L}_1(X)$ y $\lim \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$

dem: Note que $|(\mathrm{Re} f)| \leq |f| \leq S$ μ AE y $|\mathrm{Im} f| \leq |f| \leq S$ μ AE. Ent aplicamos el teorema de convergencia dominada a $\mathrm{Re} f$ y a $\mathrm{Im} f$

ej:

a) $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ es mb, pues es continua

$$\int_{(0,1)} \frac{dx}{x} = \sup \left\{ \int_{(0,1)} \varphi \, d\mu : \varphi \in \mathcal{E}^+((0,1)), 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

$f(x) = \frac{1}{x} \sin x$, $x > 0$ no es lebesgue integrable.

30. 9. 2014

Remark: $f, f_n : X \to \mathbb{C}$, mbs

$$M := \{x \in X : f_n(x) \not\to f(x)\}$$

$$= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \tfrac{1}{k}\}$$

es mb.

dem: sea $x \in X$, ent $f_n(x) \not\to f(x)$ ssi

$\exists k \in \mathbb{N}$ tq $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq N$ tq $|f_n(x) - f(x)| \geq 1/k$

$\iff \exists k \in \mathbb{N}$ tq $\forall N \in \mathbb{N}$ $x \in \bigcup_{n \geq N} \{t : |f_n(t) - f(t)| \geq \frac{1}{k}\}$

$\iff \exists k \in \mathbb{N}$ tq $x \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} \{t : |f_n(t) - f(t)| \geq \frac{1}{k}\}$

$\iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} \{t : |f_n(t) - f(t)| \geq \frac{1}{k}\}$

teorema (caracterización de continuidad): sea X un espacio de medida y T un espacio métrico, $t_0 \in T$. sea $f : T \times X \to \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, tq

i) para μ ae, $x \in X$ $f(\cdot, x) : T \to \mathbb{K}$ es cont en t_0

ii) $\forall t \in T$, $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}_1$

iii) $\exists \mathcal{U}$ vecindad de t_0 y $\varphi \in \mathcal{L}_1(X)$ tq $\forall t \in \mathcal{U}$, $|f(t, \cdot)| \leq \varphi$, μ ae

Entonces las funciones

$$F : T \to \mathbb{K}, \quad F(t) = \int_X f(t, x)\, d\mu$$

$$\phi : T \to \mathcal{L}_1(X), \quad \phi(t) = f(t, \cdot)$$

son continuas en t_0

dem: sea $(t_n)_n \subseteq \mathcal{U}$ tq $t_n \to t_0$

$$F(t_n) = \int_X f(t_n, x)\, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{\text{lebesgue}} \int_X \lim_{n \to \infty} f(t_n, x)\, d\mu$$

$$\overset{\text{i)}}{=} \int_X f(t_0, x)\, d\mu$$

$\Longrightarrow \| f(t_n, \cdot) - f(t_0, \cdot) \|_1 = \int_X | f(t_n, x) - f(t_0, x) |\, d\mu$

$\longrightarrow 0$ por lebesgue, pues $|f(t_n, x) - f(t_0, x)| \leq 2\varphi$

teorema: sea X un esp. de medida y $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $j \in [\![1, n]\!]$. si $f : D \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ tq

i) Para μ ae, $x \in X$, $f(\cdot, x)$, $\exists \frac{\partial}{\partial t_j} f(t,x)$ $(\forall t \in D)$

ii) $\forall t \in D$, $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}_1$

iii) $\exists g \in \mathcal{L}_1(X)$ tq $\left\| \frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x) \right\| \leq g(x)$

$\forall t \in D$ y μ ae, $x \in X$

si $N = \{ x \in X : \frac{\partial f}{\partial t_j}(\tau, x)$ no existe $\}$. Entonces sea
sea $\overline{N} \in \mathcal{A}$ tq $\mu(\overline{N}) = 0$ y $N \subseteq \overline{N}$. sea
$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t_j}(\tau, x) & \text{si } x \notin \overline{N} \\ 0 & \text{si } x \in \overline{N} \end{cases}$$

$\Longrightarrow \varphi$ es mb y $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(t) := \int_X f(t,x)\, d\mu$

tiene derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial t_j}(\tau) = \int_X \varphi(x)\, d\mu = \int_{X \setminus \overline{N}} \frac{\partial f}{\partial t_j}(\tau, x)\, d\mu$

$$= \int_X \frac{\partial f}{\partial t_j}(\tau, x)\, d\mu$$

dem: sea $(\varepsilon_n)_n \in (0, \infty)$ tq $\varepsilon_n \longrightarrow 0$. sea

$$e_j = (0, \dots, \underset{j\text{th}}{\underset{\uparrow}{1}}, 0, \dots)$$

tq $\forall n$, $\tau + \varepsilon_n e_j \in D$ y $\forall n$, $\psi_n(x) = \frac{1}{\varepsilon_n}\left(f(\tau + \varepsilon_n e_j, x) - f(\tau, x) \right)$

y ψ_n es mb, $\forall n \in \mathbb{N}$

Defina, $\hat{\varphi} := \limsup_{n\to\infty} \varphi_n$ mb y $\varphi = \hat{\varphi}\chi_{X\setminus\bar{N}}$ mb

Recuerde que el teorema del valor intermedio nos dice que $\forall x \in X\setminus\bar{N}$,

$$\frac{1}{\varepsilon_n}\left(f(\tau + \varepsilon_n e_j, x) - f(\tau, x)\right) = \frac{\partial f}{\partial t_j}(\tau + \hat{\varepsilon} e_j, x)$$

para $\hat{\varepsilon} \in [0, \varepsilon_n]$

y $\left| \frac{\partial f}{\partial t_j}(\tau + \hat{\varepsilon} e_j; x)\right| \leq S(x)$

$\Longrightarrow$ Por el teorema de Lebesgue

$$\int_{X\setminus\bar{N}} \frac{\partial f}{\partial t}(\tau, x)\, d\mu = \int_{X\setminus\bar{N}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varepsilon_n}\left(f(\tau+\varepsilon_n e_j, x) - f(\tau, x)\right) d\mu$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varepsilon_n}\int_{X\setminus\bar{N}} (f(\tau+\varepsilon_n e_j, x) - f(\tau, x)) d\mu$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varepsilon_n}\left(F(\tau+\varepsilon_n e_j) - F(\tau, x)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_j} F(\tau, x)$$

$\uparrow$ el límite existe y

2 10 2014

Transformada de Fourier:

sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, la transformada de Fourier es

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} f(z)\, dz$$

Formalmente, sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $F[f] : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$F[f](t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-izt} f(z)\, dz .$$

$F[f]$ está bien definida y $F[f]$ es continua, acotada con $\| F f \|_\infty \leq \| f \|_1 = \int_X |f(t)| dt$

dem:

$\forall t \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R} : |e^{-itz} f(z)| \leq |f(z)|$, ent.
$(t,z) \longmapsto e^{-itz} f(z)$ cumple con el teorema de caracterización de continuidad con

$$\varphi = |f|$$

Es decir, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \to t_0} F[f](t) = (F[f](t_0)$

Entonces $F[f]$ es continua.

Veamos ahora que es acotada, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$|F[f](t)| = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-izt} f(z) dz \right|$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|e^{-izt} f(z)|}_{|f(z)|} dz$$
$$= \| f \|_1$$

Entonces,

$F[f] : L^1 \longrightarrow L^\infty$, lineal, acotada, $\| F \|_{L^1 \to L^\infty} \leq 1$

si $z \longmapsto z f(z) \in \mathcal{L}^1$, entonces $F[f]$ es diferenciable y

$$\frac{d}{dt} F[f](t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} (e^{-itz} f(z)) dz$$
$$= -i \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} (z f(z)) dz$$
$$= -i F[\varphi](t)$$

Integrales de Riemann - Lebesgue:

Riemann: sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada

$$P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\} \text{ tq } x_0=a<x_1<\dots<x_n=b$$

$\forall i\in [\![1,n]\!]$, $m_i=\inf\{f(x) : x\in(x_{i-1},x_i)\}$

$$M_i=\sup\{f(x) \quad x\in(x_{i-1},x_i]\}$$

$$s(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i-x_{i-1}) = \int_X m_i\,\chi_{(x_{i-1},x_i)}\,d\mu$$

$$S(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i-x_{i-1}) = \int_X M_i\,\chi_{(x_{i-1},x_i)}\,d\mu$$

y $f\in\mathcal{R}([a,b])$ si

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \overline{\int_a^b} f\,dx = \overbrace{R-\int_a^b f\,dx}^{\text{integral Riemann}}$$

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \{s(P,f) : P \text{ part de } [a,b]\}$$

$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \{S(P,f) : P \text{ part de } [a,b]\}$$

Recuerde que $f\in\mathcal{R}$ ssi $\exists (P_n)_n$ sucesión de particiones tq

$$\overbrace{R-\int_a^b f\,dx}^{\text{integral Riemann}} = \lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n)$$

sea $S_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, $S_n(x)=\begin{cases} f(a), & x=a \\ m_{i,n} = & x\in(x_{i-1,n},x_{i,n}] \end{cases}$

Partición P_n

$P_n = \{ x_{i,n} : i = 1, \dots, m \}$

$$S_n(x) = \begin{cases} f(a), & x = a \\ M_{i,n} & x \in (x_{i-1,n}, x_{i,n}] \end{cases}$$

Entonces $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f \leq \cdots \leq S_2 \leq S_1$

μ a e, seguramente, $\forall x \notin \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n}_{\text{¡contable!}}$.

Todas las funciones s_n, S_n son funciones simples. Ahora, sea $s : [a,b] \to \mathbb{R}$, $s = \lim s_n$ donde existe y sea $S : [a,b] \to \mathbb{R}$, $S \lim S_n$ donde existe.

teorema: sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y λ la medida de lebesgue sobre $[a,b]$. Entonces:

i) si $f \in \mathcal{R}([a,b])$, entonces $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$ y

$$R\text{-}\int_a^b f\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\lambda$$

ii) si f es acotada, entonces $f \in \mathcal{R}([a,b])$ ssi f es continua λ ae

dem: sean s_n, S_n, s, S como antes. Entonces s, S son mb y

$$\int s\,d\lambda = \int_{[a,b]} \lim_{n \to \infty} s_n\,d\lambda \underset{\text{lebesgue}}{=} \lim_{n \to \infty} \int_{[a,b]} s_n\,d\lambda$$

$$= \lim_{n \to \infty} \overbrace{\sum_{i=1} \underbrace{m_{i,n}}_{\leq M_{i,n}} (x_{i,n} - x_{i-1,n})}^{R\text{-}\int_a^b s_n(x)\,dx}$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \overbrace{\sum_{i=1} M_{i,n} (x_{i,n} - x_{i-1,n})}^{R-\int_a^b \mathcal{S}_n(x)\,dx}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \mathcal{S}_n \, d\lambda$$

$$\underset{\text{lebesgue}}{=} \int_{[a,b]} \mathcal{S} \, d\lambda$$

$$\Longrightarrow \int_{[a,b]} s\,d\lambda \le R-\int_a^b f(x)\,dx \le \int_{[a,b]} \mathcal{S}\,d\lambda$$

$$= \int_{[a,b]} s\,d\lambda \underset{s=f\ \mu\text{ae}}{=} \int_{[a,b]} f\,d\mu$$

ii) sea $f \in \mathcal{R}([a,b])$, se puede mostrar que

f cont en $x \longleftrightarrow s(x) = \mathcal{S}(x)$

Entonces $f \in \mathcal{R}([a,b])$ ssi $\int s\,d\lambda = \int \mathcal{S}\,d\lambda$

ssi $\int (\underbrace{\mathcal{S} - s}_{\ge 0})\,d\lambda = 0$

ssi $\mathcal{S} - s \ge 0$ μ ae

ssi f es cont μ ae

ej:

i) $D : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$D(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Es lebesgue integrable, $\int_{[0,1]} f d\lambda = \int_{[0,1]} \chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} \, d\lambda = 1$

f no es continua λ ae, entonces no es R-integrable

ii) $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = p/q \quad , \ \text{mcd}(p,q) = 1 \\ 0 & x \in [0,1]/\mathbb{Q} \end{cases}$$

es continua en $[0,1]/\mathbb{Q}$, $\lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$

Ent f es continua λ ae y $f \in R[a,b]$ y

$$\int_0^1 f \, dx = \int_{[0,1]} f d\lambda = 0$$

iii) Existe una f R-integrable no Borel mb. Sea M un conjunto no Borel pero lebesgue mb con $\lambda(M) = 0$, $M \subseteq [0,1]$. Este M existe, tome $M \subseteq C$ no mb.

sea $f = \chi_M$ es continua λ ae y por el teorema $f \in R([0,1])$, pero f no es B mb.

Como $M \subseteq C$, χ_M es continua en $\mathbb{R} \setminus C$ abierto

Integrales impropias de Riemann:

$f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$R - \int_a^b f(t) dt = \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(t) dt$$

si $\forall \beta$, $\int_a^\beta f(t) dt$ existe y el límite existe ej: $f:[1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}\sin x$, $f \in \mathcal{R}$,

pero $\int_{[1,\infty)} f\,d\lambda$ no existe porque $\int_{[1,\infty)} |f|\,d\lambda = \infty$

se puede probar que si $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo,

$f: I \to \mathbb{R}$ tq la integral de

Riemann impropia

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \text{ existe}$$

Entonces $f \in \mathcal{L}^1$ y $R\text{-}\int_a^b f(x)\,dx = \int_I f\,d\lambda$

Convergencia:

sea $f_n: X \to \mathbb{K}$ mb. Entonces podemos tener:

1. **Convergencia puntual**: $\forall x$: $(f_n(x))_n$ converge en $\mathbb{K}$
2. **Convergencia μ a.e**: si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio

de medida, ent para μ ae, $x \in X$: $(f_n(x))_n$ converge en $\mathbb{K}$.

Proposición: sean $f_n, f: X \to \mathbb{R}$ mb. $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

1. $f_n \to f$ μae $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$

$$\mu\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right] = 0$$

2. supq $\mu(X) < \infty$: $f_n \to f$ μae ssi $\forall \varepsilon > 0$ $\lim_{n\to\infty} \mu\left[\bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right] = 0$

ej: si $\mu(X) = \infty$ "$\Leftarrow$" se tiene, "$\Rightarrow$" no necesariamente

se tiene, $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n = \chi_{[n,\infty)}$, ent $f_n \to 0$ en $\mathbb{R}$. En particular μ ae. Pero, $\forall n$, $\forall k \geq n$,

$\mu\left(\bigcup_{l=n}^{\infty}\{\ldots\}\right) = \infty \not\to 0.$

4.10.2014

def: sean $f_n: X \to \mathbb{K}$ mb, decimos que $(f_n)_n$ converge almost uniformly si $\forall \delta > 0$, $\exists A \subseteq X$ mb, tq $\mu(A) < \delta$ y $f_n|_{X \setminus A} \longrightarrow (f_n|_{X\setminus A})_n$ converge uniformemente

lema: sea $(f_n)_n$, $f_n \; X \to \mathbb{K}$ mb tq $(f_n)_n$ converge a.u. Entonces $\exists f: X \to \mathbb{K}$ mb tq $f_n \longrightarrow f$ μ a.e.

dem: taller

teorema de Egoroff: sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida tq $\mu(X) < \infty$ y $f_n, f \; X \to \mathbb{K}$ mb tq $f_n \longrightarrow f$ μ ae. Entonces $f_n \longrightarrow f$ a.u.

dem: Por hipótesis, $\forall \varepsilon > 0$ $\lim_{n\to\infty} \mu\{\bigcup_{l\geq n}\{x \in X : |f_l(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$

sea $\delta > 0$, queremos probar que $\exists A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \delta$ y $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists N_k$ tq $\forall n \geq N_k$ y $\forall x \in X \setminus A$, $|f_n(x) - f(x)| \leq 1/k$

Entonces, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists n_k \in \mathbb{N}$ tq

$$\mu\Big(\underbrace{\bigcup_{l \geq n_k}\{x \in X : |f_l(x) - f(x)| \geq 1/k\}}_{:= B_{n_k} \in \mathcal{A}}\Big) < \delta/2^k$$

sea $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n_k} \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n_k}) < \sum_{k=1}^{\infty} \delta/2^k = \delta$

sea $x \in X \setminus A$, ent $\forall k \in \mathbb{N}$, $x \notin B_{n_k}$ y entonces $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall m \geq n_k$, $|f_m(x) - f(x)| \leq 1/k$. Entonces $f_n \longrightarrow f$ unif. en X / A

ej: sea $X=[0,1)$ y $f_n : X \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, no converge uniformemente, pero converge a.u

def: sean f_n, f $X \to \mathbb{K}$ mb. $f_n \to f$ en medida si y sólo si, $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \left(\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \right) = 0$

obs: si $f_n \to f$ en medida y $f_n \to g$ en medida, entonces $f \equiv g$ μ a.e

dem: $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq 1/k\})$. Entonces

$\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq 1/k\} \subseteq \{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq 1/2k\}$

Entonces

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq 1/k\}) \leq \mu\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{2k}\} + \mu\{x \in X : |g(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{2k}\}$$

si $n \to \infty$, $\mu\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq 1/2k\} + \mu\{x \in X : |g(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{2k}\}$ $\to 0$. Entonces $\forall k$, $\mu\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq 1/k\} = 0$ y se concluye que $f \equiv g$ μ.a.e pues

$$f \neq g \iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{\dots\}$$

teorema: $f, f_n : X \to \mathbb{K}$ mb. Entonces

i. $f_n \to f$ a.u, entonces $f_n \to f$ en medida

ii. $f_n \to f$ μ.a.e y $\mu(X) < \infty$, ent $f_n \to f$ en medida.

dem: sean $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. a probar, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon) < \delta$. como $f_n \to f$ μ a.u, $\exists A \subseteq X$, A mb tq, $\mu(A) < \delta$ y $f_n \to f$ uniformemente en $X \setminus A$. Ent $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $\forall x \in X \setminus A$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

ii. $f_n \to f$ μ a e y $\mu(X)<\infty$, entonces por el teorema de Egoroff, $f_n \to f$ μ a.u y por i) $f_n \to f$ en medida

def: sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. sea $f: X \to \mathbb{K}$ mb. $1 \leq p < \infty$

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

si $|f|^p \in \mathcal{L}^1(X)$ y

$$\mathcal{L}^p(X) := \{ f: X \to \mathbb{K} \text{ mb } : |f|^p \in \mathcal{L}^1 \}$$

teorema: sea $1 \leq p < \infty$ y sean $f_n, f \in \mathcal{L}_p(X)$ tq $\|f_n - f\|_p \to 0$, entonces $f_n \to f$ en medida.

dem: sea $\varepsilon > 0$.

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = \int_{x \in X: |f_n - f| \geq \varepsilon} 1 \, d\mu$$

$$\leq \int_{x \in X: |f_n - f| \geq \varepsilon} \Big(\underbrace{\frac{|f_n - f|}{\varepsilon}}_{\geq 1}\Big)^p d\mu$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{x \in X: |f_n - f| \geq \varepsilon} |f_n - f|^p d\mu$$

$$\leq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^p \underbrace{\int_X |f_n - f|^p d\mu}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 0}$$

def: $f, f_n: X \to \mathbb{K}$, $A \subseteq X$, A mb. $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \cap A) = 0$$

se dice convergencia localmente en medida o convergencia estocástica.