Notación: $E(X,\mathcal{A})$, donde $(X,\mathcal{A})$ es un espacio medible, es el conjunto de todas las funciones simples de $(X,\mathcal{A})$

$$E(X,\mathcal{A}) = \{ \varphi : X \to \mathbb{R} : \varphi \text{ es simple} \}$$

$$E^+(X,\mathcal{A}) = \{ \varphi : \to [0,\infty) : \varphi \text{ es simple} \}$$

obs: $E(X,\mathcal{A})$ es un espacio vectorial

teorema: sea $(X,\mathcal{A})$ un espacio medible, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una f. medible tq $f \geq 0$. Entonces existe una sucesión $(\varphi_n)_n$ de funciones simples tq

$$0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots \leq f$$

y $\forall x \in X$, $\varphi_j(x) \to f(x)$, $(j \to \infty)$. Si f es acotada, $\varphi_j \to f$ uniformemente

dem: $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq 2^n \cdot n$. para esto, definimos

$$A_{n,k} := \{ x \in X : \frac{k-1}{2^n} < f(x) < k/2^n \}$$

y defina

$$B_n := \{ x \in X : f(x) \geq n \} = f^{-1}([n,\infty]) \in \mathcal{A}$$

obs: Todos los $A_{n,k}$, B_n son medibles

$\forall n \in \mathbb{N}$, sea

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{A_{n,k}} + n \chi_{B_n}$$

Es claro que $\forall n : \varphi_n \in E^+(X,\mathcal{A})$ y $\varphi_n \leq f$ por construcción

Monotonía de φ_n: $(\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \ldots)$:

observe que

$$A_{n,k} = A_{n+1, 2(k)-1} \cup A_{n+1, 2k}$$

Porque si $x \in A_{nk}$, ent $\frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$

$$\Rightarrow x \in A_{nk} \Leftrightarrow \frac{2(k-1)}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k-1}{2^{n+1}}$$

$$\text{ó } \frac{2k-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow x \in A_{n+1,2k-1} \text{ ó } x \in A_{n+1,2k}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$. Queremos probar que $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$

Caso 1: $x \in A_{n,k}$

Caso 1.1: $x \in A_{n+1,2k-1}$, entonces

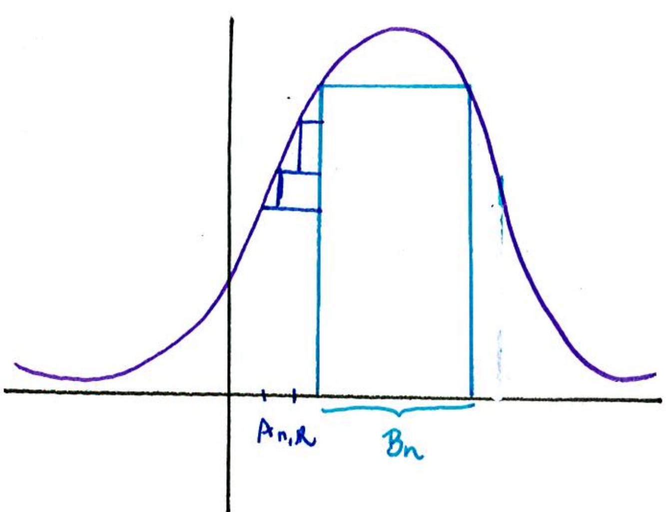
$$\varphi_n(x) = \frac{2k-2}{2^{n+1}} = \varphi_{n+1}(x)$$

Caso 1.2: $x \in A_{n+1,2k}$, entonces

$$\varphi_n(x) = \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq \frac{2k-1}{2^{n+1}} = \varphi_{n+1}(x)$$

9.9.2014

dos: Para n fijo, $X = \bigcupdot_{k=1}^{n2^n} A_{n,k} \cupdot B_n$



$\forall n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{A_{n,k}} + n\,\chi_{B_n}$$

Caso 2: $x \in B_n$, ent

$$x \in B_n = B_{n+1} \dot{\bigcup}_{k=n2^{n+1}+1}^{(n+1)2^{n+1}} A_{n+1,k}$$

$\hookrightarrow f(x) \geq n$.

Si $x \in B_{n+1}$, ent $\varphi_n(x) = n \leq n+1 \leq \varphi_{n+1}(x)$. Ahora, si $\exists k \in \{n2^{n+1}+1, \dots, (n+1)2^{n+1}\}$ tq $x \in A_{n+1,k}$. Entonces

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{k-1}{2^{n+1}} \geq n = \varphi_n(x)$$

Por construcción, las φ_n son menores o iguales a f. Esto es, $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f(x) \geq \varphi_n(x)$$

Ahora probemos convergencia puntual: sea $x \in X$, tenemos dos casos.

caso 1, $f(x) < \infty$: $\exists \bar{N}_x$ tq $f(x) \leq \bar{N}$, entonces, $\forall n \geq \bar{N}_x$, $x \in \bigcup_{k=1}^{N2^N} A_{N,k}$ con $N \geq \bar{N}_x$. Entonces, $\forall N \geq \bar{N}_x$, $0 \leq f(x) - \varphi_N(x) \leq 2^{-N}$

$\downarrow$

$x \in A_{N,k}$ para un $k \in \{1, \dots, N2^N\}$

Si $N \to \infty$, ent

$$0 \leq f(x) - \varphi_N(x) \leq 0$$

$$\varphi_n(x) \xrightarrow[\text{punt}]{} f(x)$$

caso 2, $f(x) = \infty$: Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in B_n$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi_n(x) = n$. Entonces tenemos que

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \to \infty} n = \infty = f(x)$$

Si f es acotada, ent $\exists \overline{N}$ independiente de x tq $\forall x \in X$, $0 \leq f(x) \leq \overline{N}$, entonces

$$\forall n \geq \overline{N}: \; 0 \leq f(x) - \varphi_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$$

Como $\frac{1}{2^n}$ no depende de x. Ent sea $\varepsilon > 0$, tome $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $N_0 \geq \overline{N}$ y $1/2^{N_0} < \varepsilon$, ent $\forall x \in X$ y $\forall n \geq N_0$, $| f(x) - \varphi_n(x) | < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$

La integral de Lebesgue:

def: (integral de funciones simples positivas): sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $g \in E^+(X, \mathcal{A})$. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{A}$ tq

$$g = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{M_j}$$

Entonces definimos

$$J(g) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(M_j)$$

Convención: $0 \cdot \infty = 0$

$$\int_X g \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(M_j)$$

obs: $J(g)$ está bien definida

dem: sea $g = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{M_j}$ una función simple con $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{A}$. Sea $Rg(g) = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, sabemos que es finita, con $\beta_j = \beta_k$ [illegible] (k). Recordando que pedimos [illegible] los M_j disjuntos. Sabemos más, los M_j son disjuntos, [illegible]

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}.$$

luego, $\forall j = 1, \dots, m$, $\exists S_j = \{k \in \{1, \dots, n\} : \beta_j = \alpha_k\}$, j fijo. Entonces

$$N_j = \bigcup_{k \in S_j} M_k = g^{-1}(\{\beta_j\})$$

$$\Longrightarrow g = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{M_j} = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{k \in S_j} \overset{=\beta_j}{\alpha_k} \chi_{M_k} \right)}_{\beta_j \sum_{k \in S_j} \chi_{M_k}} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{N_j}$$

$$= \beta_j \chi_{\bigcup_{k \in S_j} M_k}$$

[illegible]

$$= \beta_j \chi_{N_j}$$

Ahora vamos a probar que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(M_j) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(N_j)$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(M_j) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k \in S_j} \overset{=\beta_j}{\alpha_k} \mu(M_k) \right) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(N_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \beta_j \underbrace{\sum_{k \in S_j} \mu(M_k)}_{\mu\left(\bigcup_{k \in S_j} M_k\right) = \mu(N_j)}$$

Proposición (propiedades de la integral): sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. sean $g, h \in E^+(X, \mathcal{A})$, $\alpha \geq 0$

i. $J(\alpha g) = \alpha J(g)$

ii. $J(g+h) = J(g) + J(h)$

iii. si $g \geq h$, ent $J(g) \geq J(h)$

dem:

i. //

ii. sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}^+$ y sean $M_1, \dots, M_n$ disjuntos dos a dos $\in \mathcal{A}$. $N_1, \dots, N_m \in \mathcal{A}$ disjuntos dos a dos tq

$$g = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{M_j}, \quad h = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{N_j}$$

Sin restricción, $n = m$ y $N_j = M_j$, $j = 1, \dots, n$, sean

$M_{n+1} = X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} M_j \right)$, $\alpha_{n+1} = 0$

$N_{n+1} = X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} N_j \right)$, $\beta_{n+1} = 0$

y defina $\forall j \in \{1, \dots, n+1\}$, $\forall i \in \{1, \dots, m+1\}$

$$C_{i,j} = M_j \cap N_j$$

Entonces $\forall j \in \{1, \dots, n+1\}$, $M_j = \bigcup_{k=1}^{m+1} M_j \cap N_k$

$$\Rightarrow g = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{M_j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_j \underbrace{\chi_{M_j \cap N_k}}_{C_{jk}} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m+1} \overline{\alpha}_{jk} \chi_{C_{j,k}}$$

donde $\overline{\alpha}_{jk} = \alpha_j$ ($k \in \{1, \dots, m+1\}$) Haciendo lo mismo para h, probamos la afirmación y tenemos que:

$$J(g+h) = J\left(\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_j) \chi_{M_j}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_j) \mu(M_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(M_j) + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mu(M_j)$$

$$= J(g) + J(h)$$

iii) $J(g) = J(g-h+h)$

$$= \underbrace{\underbrace{J(g-h)}_{\geq 0} + J(h)}_{\geq 0} \geq J(h)$$

def: sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f: X \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$, entonces, si f es medible

$$J(f) := \int_X f \, d\mu = \sup \{ J(\varphi) : \varphi \in E^+(\mathcal{A}, X), \ \varphi \leq f \}$$

obs: $J(f) \geq 0$

obs: si $f, g: X \to \mathbb{R}$ medibles y $\alpha \geq 0$, entonces:

i. $J(\alpha f) = \alpha J(f)$

ii. si $f \geq g$, ent $J(f) \geq J(g)$

iii. $J(f+g) = J(f) + J(g)$

11.9.2014

def: sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ esp. de medida, si $f: X \to [0, \infty]$ medible

f se dice integrable ssi $\int_X f\, d\mu < \infty$. Ahora bien, $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es integrable ssi f^+ y f^- son integrables. En este caso:

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu$$

si f es medible.

sea $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ medible es integrable ssi $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ son integrables. En este caso, definimos

$$\int_X f d\mu := \int_X \operatorname{Re} f\, d\mu + i \int_X \operatorname{Im} f\, d\mu$$

def: sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ ó $\overline{\mathbb{R}}$

$$\mathcal{L}^1((X, \mathcal{A}, \mu), \mathbb{K}) := \{ f: X \longrightarrow \mathbb{K},\ f \text{ integrable} \}$$

otras notaciones:

$$\mathcal{L}^1(X, \mathbb{K}),\ \mathcal{L}^1(X)$$

teoremas de convergencia:

Hay tres teoremas grandes de convergencia: el lema de Fatou, el teorema de Beppo Levi o de convergencia monótona y el teorema de Lebesgue o el teorema de convergencia dominada.

teorema (lema de Fatou): sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : X \longrightarrow [0, \infty]$, medibles. Defina:

$$f: X \longrightarrow [0, \infty]$$

$$f := \liminf_{n \to \infty} f_n$$

Entonces:

$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu$$

dem:

obs: f es medible, pues es liminf de medibles.

Por definición:

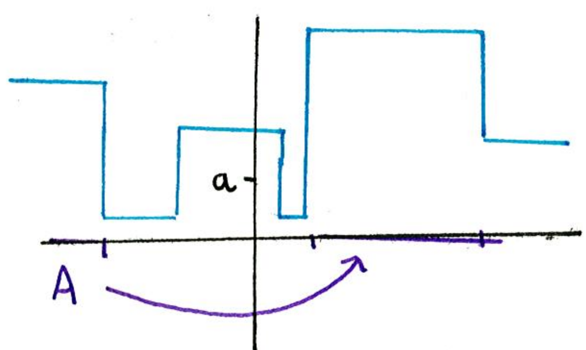
$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu : \varphi \in \mathcal{E}^+(X, \mathcal{A}),\ \varphi \leq f \right\}$$

Sea $\varphi \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}, X)$ con $\varphi \leq f$. Queremos demostrar que $\int_X \varphi \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu$

caso 1: $\int_X \varphi \, d\mu = \infty$

Como $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_j) = \infty = \int_X \varphi \, d\mu$, existe $A \in \mathcal{A}$, $a > 0$ tq $\mu(A) = \infty$; $\forall x \in A$, $\varphi(x) > a > 0$

↳ donde a es, por ejemplo, $a = \frac{\alpha_i}{2}$, donde α_i es el α_i asociado a A



Ahora, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n := \{ x \in X : f_k(x) \geq a \ (k \geq n) \}$

$$= \underbrace{\bigcap_{k \geq n} \underbrace{f_k^{-1}([a, \infty))}_{\text{medible}}}_{\text{medible}}$$

Más aún, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$ y $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, lo anterior, pues si $x \in A$, ent $\varphi(x) > a$ y $\varphi(x) \leq \liminf f_n(x)$

Ent $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $\forall k \geq n$, $f_k(x) > a$ y ent $x \in A_k \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$

sabemos que $\infty = \mu(A) \leq \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Entonces,

$$\int_X f_n \, d\mu \geq \int_X \chi_{A_n} f_n \, d\mu \geq \int_X a \chi_{A_n} \, d\mu$$
$$= a\,\mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Entonces $\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \lim \int_X f_n \, d\mu = \infty$

Caso 2: $\int_X \varphi \, d\mu < \infty$

sea $A := \{x \in X : \varphi(x) > 0\}$, $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) < \infty$, pues de lo contrario $\int_X \varphi \, d\mu = \infty$. sea

$$M = \max_{x\in X} \{\varphi(x)\}$$

Si $M=0$: $\varphi \equiv 0$ y $\int_X \varphi \, d\mu = 0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$

sea $M>0$: sea $\varepsilon > 0$, sea $\varepsilon' := \min\{1, \frac{\varepsilon}{\int_X \varphi d\mu + M}\}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $A_n := \{x \in X : \forall k \geq n \; f_k(x) \geq (1-\varepsilon')\varphi(x)\}$

↑ preimagen de alguien medible

Donde $A_n = \bigcap_{k\geq n} \{x \in X : f_k(x) \geq (1-\varepsilon')\varphi(x)\}$

$\Rightarrow A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq$

Ahora, $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, pues si $x \in A$ ent

$$0 \leq (1-\varepsilon')\varphi(x) < f(x)$$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$, tq $\forall k \geq n$,

$$f_k(x) \geq (1-\varepsilon')\varphi(x)$$

$\Rightarrow x \in A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$

sea $B_n := A \setminus A_n$. En particular

$$\mu(B_1) \leq \mu(A) < \infty \text{ y } \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$$

y $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ y $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$. Entonces,

$\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $\mu(B_n)$

Entonces, $\forall k \geq N;\ \mu(A \setminus A_k) < \varepsilon'$

$$\int_X f_k \, d\mu \geq \int_X \chi_{A_k} f_k \, d\mu \geq \int_X (1-\varepsilon') f_n \, d\mu \quad \overbrace{\quad}^{1-\chi_{A_k^c}}$$

$$\geq \int_X (1-\varepsilon') \varphi(x) \cdot \chi_{A_k} \, d\mu$$

$$= (1-\varepsilon') \int_X \varphi(x) \, d\mu - (1-\varepsilon') \int_X \chi_{A_k^c} \varphi \, d\mu$$

$$\geq \int_X \varphi \, d\mu - \varepsilon' \int_X \varphi \, d\mu - M(1-\varepsilon') \int_X \chi_{A_k^c} \, d\mu \quad \overset{\varphi}{\leq} M$$

Pero puedo tomar en lugar de $A_k^c = X \setminus A_k$ a $A \setminus A_k$

$$\geq \int_X \varphi \, d\mu - \varepsilon' \int_X \varphi \, d\mu - M \int_X \chi_{A \setminus A_k} \, d\mu$$

$$\geq \int_X \varphi \, d\mu - \varepsilon' \left(\int_X \varphi \, d\mu + M \right) \quad (\mu(A \setminus A_k) < \varepsilon')$$

$$\geq \int_X \varphi \, d\mu - \varepsilon$$

Desigualdad estricta sí es posible:

z.B: $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_n = \chi_{[0,\infty)}$ si n es par

$f_n = \chi_{[-\infty,0]}$ si n es impar

$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} f_n = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \infty$

$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \liminf f_n \, d\lambda = 0 < \infty \ \liminf \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda$$

si tengo $f_n : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ y $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ puntualmente, en ese caso sigo teniendo desig. estricta, pues si

$$f_n = \chi_{[n,\infty)}$$

$\forall x \in \mathbb{R} : \liminf f_n = 0$, pero

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf f_n \, d\lambda = 0 < \infty = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda$$

teorema de convergencia monótona: sea (X, A, μ) un espacio de medida, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : X \to [0, \infty]$ tq $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$ para todo x fijo. Entonces si cada f_n es medible,

$$f := \lim_{n \to \infty} f_n \text{ existe, es medible y}$$

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu$$

dem: $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \leq f$, entonces

$$\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \quad \text{(monotonía)}$$

Por Fatou, $$\int_X f \, d\mu = \int_X \lim f_n \, d\mu = \int_X \liminf f_n$$
$$\leq \liminf \int_X f_n \, d\mu$$
$$= \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu$$

$$\Longrightarrow \int_X f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu$$

corolario: sea (X, A, μ) espacio de medida, $f, g : X \to [0, \infty]$ medibles. Entonces

i. $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$

ii. $\int_X f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \quad \mu$ AE

iii. $\int_X f \, d\mu < \infty \implies f < \infty \quad \mu$ AE

dem:

i. Nosotros sabemos que podemos aproximar a f y a g por f. simples positivas. Esto es:

$\exists\ (s_n)_n, (t_n)_n \subseteq E^+(X, \mathcal{A})$ t.q.

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$$
$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq g$$

$\Rightarrow f = \lim s_n, \quad g = \lim t_n$

$\Rightarrow 0 \leq s_1 + t_1 \leq s_2 + t_2 \leq \cdots \leq f + g$

y $\lim_{n\to\infty} (s_n + t_n) = f + g$ puntualmente

Por el teorema de convergencia monótona:

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (s_n + t_n)\,d\mu$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\int_X s_n\,d\mu + \int_X t_n\,d\mu \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\,d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X t_n\,d\mu$$

$$= \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$$

ii. Sea $N := \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. [illegible]

[illegible] $\mu(N) = 0 \iff \int f\,d\mu = 0$

"$\Longleftarrow$": [illegible] $\mu(N) = 0$ [illegible]

[illegible] $\varphi \leq f$. [illegible] $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $M_1, \ldots, M_n$ [illegible] t.q. $\varphi = \sum \alpha_j \chi_{M_j}$. [illegible] $\alpha_j \neq 0$: $M_j \subseteq N$ [illegible] $\mu(M_j) = 0$ [illegible]

$$\int_X \varphi\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\mu(M_i) = 0$$

$\Rightarrow \int_X f\,d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi\,d\mu : [illegible] \right\}$

$= 0$

13 9 2010

"$\Leftarrow$": sup $\int_X f\,d\mu = 0$. sea $A_n := \{ x \in X : f(x) > \frac{1}{n} \}$

Ent $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{1}{n} \chi_{A_n} \leq f$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 = \int_X f\,d\mu \geq \int_X \frac{1}{n} \chi_{A_n} d\mu$$
$$= \frac{1}{n}\mu(A_n) \geq 0$$

$$\Rightarrow \mu(A_n) = 0 \quad y \quad \mu(N) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = 0$$

iii) sup que $\int_X f\,d\mu < \infty$, sea

$$B_n := \{ x \in X : f(x) > n \} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si $M = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{ x \in X : f(x) = \infty \}$

Tenemos que $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \cdots$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \int_X f\,d\mu \geq \int_X n\chi_{B_n} d\mu$$
$$= n\mu(B_n)$$

En particular, $\mu(B_1) \leq \int_X f\,d\mu < \infty$, ent

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_X f\,d\mu$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq 0$$
$$\Rightarrow \mu(M) = 0$$

Corolario: sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f_n : X \to [0,\infty]$ medibles. Entonces

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\,d\mu$$

dem: teorema de convergencia monótona

Corolario: sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f, g : X \to [0, \infty]$ medibles tq $f = g$ μ A E. Entonces

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$$

dem: sea $A := \{x \in X : f(x) \quad g(x)\}$. Entonces $\exists M \in \mathcal{A}$ tq $\mu(M) = 0$ y $X \setminus A \subseteq M$. Ent

$$\int_X f \, d\mu = \underbrace{\cancel{\int_X \chi_M f \, d\mu}^{0}}_{\forall \mu \text{ AE}} + \int_X \underbrace{\chi_{X \setminus M} f}_{\chi_{X \setminus M} g} \, d\mu$$

$$= \int_X g \, \chi_{X \setminus M} + \int_X g \, \chi_M \, d\mu = \int_X g \, d\mu$$

Corolario: sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f_n : X \to [0, \infty]$ medibles tq $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ existe μ AE y sea $f : X \to [0, \infty]$ tq

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

si el límite existe. Entonces

$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu$$

dem: sea $\tilde{f} : X \to [0, \infty]$, $\tilde{f}(x) := \liminf f_n(x)$

Entonces, $f = \tilde{f}$ μ AE. y, por consiguiente,

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \tilde{f} \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu$$

Recall: $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ medible, f es integrable ssi f^+, f^- son integrables. En este caso

$$\int_X f \, d\mu = \underbrace{\int_X f^+ \, d\mu}_{< \infty} - \underbrace{\int_X f^- \, d\mu}_{< \infty}$$

Proposición: sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f_1, f_2 : X \to [0,\infty]$ medibles con $\int_X f_1 d\mu$, $\int_X f_2 d\mu < \infty$. Entonces $f := f_1 - f_2$ es integrable y $\int_X f d\mu = \int_X f_1 d\mu - \int_X f_2 d\mu$.

dem: f es medible y $f^+ \leq f_1$, puesto que si $f(x) \geq 0$,
$f^+(x) = f(x) = f_1(x) - \underbrace{f_2(x)}_{\geq 0} \leq f_1(x)$. Si x es tal que $f(x) < 0$, ent $f^+(x) = 0 \leq f_1(x)$.

De manera análoga, $f^- \leq f_2$

$\Rightarrow \int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu < \infty$, es decir, f^+, f^- son integrables y f es integrable y $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$

Ahora,

$$f^+ - f^- = f = f_1 - f_2$$

no sabemos si la integral se parte bien con restas!!

$$\Rightarrow f^+ + f_2 = f_1 + f^-$$

$$\Rightarrow \int_X (f^+ + f_2)\, d\mu = \int_X (f_1 + f^-)\, d\mu$$

$$\Rightarrow \int_X f^+ d\mu + \int_X f_2 d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f^- d\mu$$

$$\Rightarrow \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu = \int_X f_1 d\mu - \int_X f_2 d\mu$$

teorema (Reglas de integración): sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, sean $f, g : X \to \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces

i. $f \in \mathcal{L}_1(X, \mathbb{K})$, $\alpha f \in \mathcal{L}_1(X, \mathbb{K})$ y

$$\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$$

ii. $f, g \in \mathcal{L}_1(X, \mathbb{K})$, ent $f + g \in \mathcal{L}_1(X, \mathbb{K})$ y

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$$

iii. si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ $f, g \in \mathcal{L}_1(X, \mathbb{R})$ y $f \leq g$, así

$$\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$$

dem: sin restricción $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

i. si $\alpha = 0$, ✓

si $\alpha > 0$, así $(\alpha f)^+ = \alpha f^+ \in \mathcal{L}_1$ y $(\alpha f)^- = \alpha f^- \in \mathcal{L}_1$

$\in \mathcal{L}_1$

entonces
$$\begin{aligned}
\int_X \alpha f\,d\mu &= \int_X (\alpha f)^+\,d\mu - \int_X (\alpha f)^-\,d\mu \\
&= \int_X \alpha f^+\,d\mu - \int_X \alpha f^-\,d\mu \\
&= \alpha \int_X f^+\,d\mu - \alpha\int_X f^-\,d\mu \\
&= \alpha\left(\int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu\right) \\
&= \alpha \int_X f\,d\mu
\end{aligned}$$

si $\alpha < 0$, $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ y $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$

y
$$\begin{aligned}
\int_X \alpha f\,d\mu &= \int_X (\alpha f)^+\,d\mu - \int_X (\alpha f)^-\,d\mu \\
&= \int_X (-\alpha) f^-\,d\mu - \int_X (-\alpha) f^+\,d\mu \\
&= -\alpha\int_X f^-\,d\mu + \alpha \int_X f^+\,d\mu \\
&= \alpha\left(\int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu\right) \\
&= \alpha\int_X f\,d\mu
\end{aligned}$$

ii. $f+g = (f+g)^+ - (f+g)^-$

En general, $(f+g)^+ \neq f^+ + g^+$. Pero, sabemos que

$$\int_X (f^+ + g^+) d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu < \infty$$

$$\int_X (f^- + g^-) d\mu = \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu < \infty$$

$\Rightarrow f+g \in \mathcal{L}_1(X, \mathbb{R})$ y

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X (f^+ + g^+) d\mu - \int_X (f^- + g^-) d\mu$$

$$= \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu - \int_X f^- d\mu - \int_X g^- d\mu$$

$$= \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

iii. $0 \leq g - f$

$\Rightarrow 0 \leq \int_X (g-f) d\mu = \int_X g \, d\mu - \int_X f \, d\mu$

$\Rightarrow \int_X g \, d\mu \geq \int_X f \, d\mu$

IV. $f, g \in \mathcal{L}_1(X, \mathbb{R})$ con $f = g$ μ A.E, ent

$$\int f d\mu = \int g \, d\mu$$

Si $f \equiv g$ μ A.E, $f^+ \equiv g^+$, $f^- = g^-$ μ A.E,

ent

$$\int_X f^{\pm} d\mu = \int_X g^{\pm} d\mu$$

$\Rightarrow \int_X f \, d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$

$= \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu = \int_X g \, d\mu$

Corolario: $(\mathcal{L}_1(X, \mathbb{K}), \| \cdot \|_1)$ es un espacio vectorial con semi-norma:

$$\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu$$

Proposición: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f: X \to \mathbb{K}$ medible. Ent

i. $f \in \mathcal{L}_1(X, \mathbb{K})$ ssi $|f| \in \mathcal{L}_1(X, \mathbb{K})$

ii. $f \in \mathcal{L}_1(X, \mathbb{K}) \to \left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$

dem:

i. si f es medible, ent $|f|$ es medible. Ahora, si $0 \leq f \leq g$, ent $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$

"$\Rightarrow$": $\underbrace{(\mathrm{Re} f)^+ + (\mathrm{Re} f)^-}_{= |\mathrm{Re} f|} + \underbrace{(\mathrm{Im} f)^+ + (\mathrm{Im} f)^-}_{= |\mathrm{Im} f|} \geq |f|$,

pues $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a| + |b|$

y $(\mathrm{Re} f)^+ + (\mathrm{Re} f)^- + (\mathrm{Im} f)^+ + (\mathrm{Im} f)^- \in \mathcal{L}_1$

$$\to \int_X |f| \, d\mu \leq \int_X (\mathrm{Re} f)^+ d\mu + \int_X (\mathrm{Re} f)^- d\mu + \int_X (\mathrm{Im} f)^+ d\mu + \int_X (\mathrm{Im} f)^- d\mu < \infty$$

"$\Leftarrow$":

$\mathrm{Re} f^{\pm} \leq |\mathrm{Re} f| \leq |f|$

$\mathrm{Im} f^{\pm} \leq |\mathrm{Im} f| \leq |f|$

$$\to \int_X \mathrm{Re} f^{\pm} \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu < \infty$$

$$\to \int_X \mathrm{Im} f^{\pm} \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu < \infty$$

$\to (\mathrm{Re} f)^{\pm}, (\mathrm{Im} f)^{\pm} \in \mathcal{L}_1(X, \mathbb{K}) \to f \in \mathcal{L}_1(X, \mathbb{K})$

dem: $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

$$\int_X |f|\, d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu$$

$$\geq \left| \int_X f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right|$$

$$= \left| \int_X f\, d\mu \right|$$

si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, sea $\int_X f\, d\mu = Re^{i\varphi}$, con $R \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \left| \int_X f d\mu \right| = e^{-i\varphi} \int_X f d\mu = |R| = R$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\left| \int_X f d\mu \right|}_{\in \mathbb{R}} = \int_X e^{-i\varphi} f\, d\mu$$

$$= \int_X \underbrace{\mathrm{Re}(e^{-i\varphi} f)}_{\in \mathbb{R}} d\mu + i \overbrace{\int \underbrace{\mathrm{Im}(e^{-i\varphi} f)}_{\in \mathbb{R}} d\mu}^{=0}$$

$$\leq \int_X |\mathrm{Re}(e^{-i\varphi} f)|\, d\mu \quad (\text{caso } 1)$$

$$= \int_X |\mathrm{Re}\, f|\, d\mu$$

$$\leq \int_X |f|\, d\mu$$

teorema de convergencia dominada (teorema de Lebesgue): sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ medibles y $f: X \longrightarrow \mathbb{K}$ medible tq $f_n \longrightarrow f$ μ AE y $S: X \longrightarrow [0,\infty]$ tq $\forall n$ $|f_n| \leq S$ μ-AE y $S \in \mathcal{L}_1(X, \mathbb{R})$.

Entonces $f \in \mathcal{L}_1(X, \mathbb{K})$ y

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu$$