teorema (extensión de premedidas a medidas exteriores): sean $\mathcal{H}$ un semianillo sobre X y $\mu : \mathcal{H} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una premedida sobre $\mathcal{H}$. Defina

(inf $\emptyset = \infty$. si $A \not\subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{H}} B$, ent $\mu^* = \inf \emptyset = \infty$)

$$\mu^* : \mathbb{P}X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \ : \ (A_j) \subseteq \mathcal{H} \text{ tq } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right\}$$

Entonces:

i) μ^* es una medida exterior sobre X y $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}$

ii) $\mu^*|_{\mathcal{H}} = \mu$

dem: sin restricción $\mathcal{H}$ es un anillo, pues puedo tomar el anillo generado por $\mathcal{H}$ y extender μ.

i) Es claro que $\mu^*(\emptyset) = 0$ y la monotonía también es clara (recall si $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, si $\exists \inf A, \inf B$, $\inf A \leq \inf B$)

σ-aditividad: sea $(A_j)_j \subseteq \mathbb{P}X$. Queremos probar que

$$\mu^*\Big(\underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j}_{:= A}\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$$

caso 1: $\exists j \in \mathbb{N}$ tq $\mu^*(A_j) = \infty$

$$\Longrightarrow \mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \infty = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$$

caso 2: $\forall j \in \mathbb{N}$, $\mu^*(A_j) < \infty$. sea $\varepsilon > 0$. ent $\forall j \in \mathbb{N}$, $\exists N_{jk}$ tq $A_j \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_j$ y $N_{jk} \in \mathcal{H}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(N_{jk}) < \mu^*(A) + \varepsilon/2^j$$

$$\Longrightarrow A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} N_{jk} \quad \Big\} \text{ unión contable!}$$

$$\Longrightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(N_{jk}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_j) + \varepsilon/2^j \right) \quad \Big) \text{ convergencia absoluta}$$

$$\Longrightarrow \mu^*(A) \overset{\text{def de } \mu^*}{\leq} \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(N_{jk}) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu^*(A_j) + \sum_{j \in \mathbb{N}} \varepsilon/2^j$$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$$

Veamos que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}$. Sea $M \in \mathcal{H}$, queremos probar que $\forall A \subseteq X$,

$\mu^*(A \setminus M) + \mu^*(A \cap M)$

Sea $\varepsilon>0$, sea $(A_j)_j \subseteq H$ tq $A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ y $\mu^*(A)+\varepsilon \geq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$

$$\Longrightarrow \mu^*(A)+\varepsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j\cap M)+\mu(A_j\setminus M) \quad \left(\begin{smallmatrix}H \text{ es un anillo} \\ \text{y } \mu \text{ es premedida}\end{smallmatrix}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j\cap M)+\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j\setminus M)$$

$$\geq \mu^*(A\cap M)+\mu^*(A\setminus M)$$

def de μ^* y $A\cap M \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\cap M$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \mu^*(A)+\varepsilon \geq \mu^*(A\cap M)+\mu^*(A\setminus M)$$

$$\Longrightarrow \mu^*(A) \geq \mu^*(A\cap M)+\mu^*(A\setminus M)$$

ii) sea $M\in H$, queremos probar que $\mu(M)=\mu^*(M)$.

Por def de μ^*, como $M\subseteq M$, $\mu(M)\geq \mu^*(M)$ (inf), veamos que

$\mu(M)\leq\mu^*(M)$

Sea $(A_j)_j\subseteq H$ tq $M\subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Entonces $\mu(M) \underset{\uparrow}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j)$

μ es σ-subaditiva

$$\Longrightarrow \mu(M)\leq \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j) : (A_j)_j\subseteq H \text{ tq } A\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\right\} = \mu^*(M)$$

observación: si μ es contenido, pero no premedida, entonces $\mu^*|_H \neq \mu$

dem: Vamos a mostrar que $\exists A\in H$ tq $\mu(A)>\mu^*(A)$

Si μ no es premedida, entonces $\exists (A_j)_j\subseteq H$ disjuntos dos a dos tal que $\dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} A_j \in H$ y $\mu\left(\dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} A_j\right) > \sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j) \geq \mu^*\left(\dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} A_j\right)$

Tome $A=\dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} A_j$ $\lightning$

Jetz haben wir:

a. μ premedida sobre un anillo R sobre X, entonces
   - a'. μ tiene una extensión a una medida exterior μ^* sobre $\mathbb{P}X$
   - b'. $\mu^*|_{\mathfrak{m}}$ es medida

$$R\subseteq \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma\text{-álgebra}}}{\sigma(R)} \subseteq \mathfrak{m}$$

Unicidad de la extensión: la extensión no es única, considere X conjunto y sea $R := \{\emptyset\}$ y μ la medida sobre R, $\sigma(R) = \{\emptyset, X\}$. Ent $\forall \alpha \in [0,\infty]$, $\mu_\alpha : \sigma(R) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\mu_\alpha(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ \alpha & \text{si } A = X \end{cases}$

obs: $\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ \infty & \text{si } A \neq \emptyset \end{cases}$

def: sea X un conjunto, R un anillo sobre X y μ una premedida sobre R. μ se dice **σ finita** si $\exists (A_j)_j \subseteq R$ tq $\forall j \in \mathbb{N}$ $\mu(A_j) < \infty$ y $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = X$

la definición es análoga si μ es un contenido, R un semianillo.

ej: sea $J = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a \leq b\} \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{R})$

$\mu([a,b)) = b - a$

es σ-finito, pues $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1)$ y $\mu([n,n+1)) = 1 < \infty$

teorema de extensión de Hahn: sea R un anillo sobre X, $\sigma(R) :=$ σ-álgebra generada por R y μ una premedida sobre R si μ es σ finita, existe una única extensión de μ a $\sigma(R)$

dem:

a. Existencia: Tome la medida exterior y $\mu^*|_{\sigma(R)}$

b. unicidad: sea $\overline{\mu} := \mu^*|_{\sigma(R)}$

y sea $\nu : \sigma(R) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medida tq $\nu|_R = \mu$

queremos probar que $\overline{\mu} = \nu$.

Como μ es σ-finito, sean $(A_j)_j \subseteq R$ tq $\forall j$, $\mu(A_j) < \infty$ y $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = X$. Sin restricción $A_j \cap A_k = \emptyset$ si $j \neq k$ sea $M \subseteq \sigma(R)$,

Vamos a probar que $\bar{\mu}(M) = \nu(M)$. Sin restricción, $\exists A \in R$ tq $\mu(A) < \infty$ y $M \subseteq A$. lo anterior, puesto que

$$M = M \cap X = \dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}} \underbrace{(M \cap A_j)}_{\subseteq A_j}$$

Además, $\bar{\mu}, \nu$ son medidas, entonces

$$\bar{\mu}(M) = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\mu}(M \cap A_j)$$

$$\nu(M) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(M \cap A_j)$$

Entonces es suficiente probar que $\forall j$

$$\bar{\mu}(M \cap A_j) = \nu(M \cap A_j)$$

y los conjuntos $M \cap A_j$ satisfacen lo que estamos suponiendo.

a. $\bar{\mu}(M) \geq \nu(M)$:

$$\bar{\mu}(M) = \mu^*(M) = \inf \{ \underbrace{\sum_{j \in \mathbb{N}} \underbrace{\mu(B_j)}_{= \nu(B_j), \text{ pues } B_j \in R}}_{\geq \nu(M)} : B_j \in R \text{ y } M \subseteq \dot{\bigcup_{j \in \mathbb{N}}} B_j \}$$

$$\geq \nu(M) \quad (\text{inf del conjunto y } \nu(B_j) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(B_j) \ \forall j)$$

b. $\bar{\mu}(M) \leq \nu(M)$:

De manera análoga, $\bar{\mu}(A \setminus M) \geq \nu(A \setminus M)$. Entonces

$$\bar{\mu}(A) = \bar{\mu}(\underbrace{A \cap M}_{= M}) + \bar{\mu}(A \setminus M)$$

$$\geq \nu(A \cap M) + \nu(A \setminus M) = \nu(A)$$

$$= \mu(A) = \bar{\mu}(A)$$

$A \in R$

$$\Longrightarrow \bar{\mu}(M) + \bar{\mu}(A \setminus M) = \nu(M) + \nu(A \setminus M)$$

$\Longrightarrow \bar{\mu}(M) - \nu(M) = \nu(A \setminus M) - \bar{\mu}(A \setminus M) \leq 0$

$(\nu(A \setminus M) \leq \bar{\mu}(A \setminus M))$

y $0 \leq \bar{\mu}(M) - \nu(M)$, pues $\nu(M) \leq \bar{\mu}(M)$

$\Longrightarrow \bar{\mu}(M) = \nu(M)$

teorema: sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{E}$ $\cap$ estable (i.e, si $A, B \in \mathcal{E}$, $A \cap B \in \mathcal{E}$). Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra sobre X, y $\exists (E_j)_j \subseteq \mathcal{E}$ tq $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = X$. Si μ, ν son medidas sobre $\mathcal{A}$ tq $\mu(E_j) = \nu(E_j) < \infty$, $j \in \mathbb{N}$), entonces $\mu = \nu$

dem: usa sistemas de Dynkin

wir haben:

si R es un anillo con premedida μ, entonces tenemos

$\mu^*, \mathcal{M}$

y $R \subseteq \sigma(R) \subseteq \mathcal{M}$

Queremos saber quién es $\mathcal{M} \setminus \sigma(R)$.

def: sea $\mathcal{A}$ un σ-álgebra y μ una medida sobre $\mathcal{A}$. Decimos que el espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es **completo** si y sólo si $\forall M \in \mathcal{A}$ tq $\mu(M) = 0$, en t si $N \subseteq M$, $N \in \mathcal{A}$.

def: $M \subseteq X$ es un **subconjunto nulo** si $M \in \mathcal{A}$ y $\mu(M) = 0$

def: $N \subseteq X$ es **despreciable** si $\exists M \in \mathcal{A}$ tq $N \subseteq M$ y $\mu(M) = 0$.

obs: ser subconjunto nulo es más fuerte que ser despreciable

ej: sea R un anillo sobre X, μ medida sobre R, μ^* la extensión de μ y $\mathcal{M}$ el álgebra generada por μ^*. Entonces

$(X, \mathcal{M}, \mu^*|_{\mathcal{M}})$ es completo

dem: sea $N \subseteq X$ tq $\exists M \in \mathfrak{m}$ con $\mu^*(M) = 0$, $N \subseteq M$. Queremos probar que $N \in \mathfrak{m}$. Sea $A \subseteq X$, $N \subseteq M$. Entonces

$$0 \leq \mu^*(N) \leq \mu^*(M) = 0$$

$\Longrightarrow \mu^*(N) = 0$ y por caratheodory $N \in \mathfrak{m}$

30 · 8 · 2014

obs: sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, μ^* la medida exterior de μ, entonces $(X, \mathfrak{m}, \mu^*|_{\mathfrak{m}})$ es la completación de $(X, \mathcal{A}, \mu)$

teorema: sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito, entonces $(X, \mathfrak{m}, \mu^*|_{\mathfrak{m}})$ es la completación de $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Es decir, si $\exists (X, \mathcal{L}, \nu)$ espacio de medida completo con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$, $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$, entonces $\mathfrak{m} \subseteq \mathcal{L}$ y $\nu|_{m} = \mu^*|_{\mathfrak{m}}$

Antes de probar esto, vamos a probar el siguiente teorema

teorema: sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $\mathcal{N} = \{N \subseteq X : N$ es despreciable$\}$. Definimos $\overline{\mathcal{A}} := \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$ y sea $\overline{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$, $A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}$. Entonces:

i. $\overline{\mu}$ esta bien definida, $\overline{\mathcal{A}}$ es σ-álgebra, $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ es un espacio de medida completo. Además, $\overline{\mu}$ es la extensión única de μ a $\overline{\mathcal{A}}$.

ii. $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ es completación de $(X, \mathcal{A}, \mu)$

dem:

i. **$\overline{\mu}$ está bien definida**: Sean $A, B \in \mathcal{A}$, $N, M \in \mathcal{N}$ tq $A \cup M = B \cup N$. Sea $C \in \mathcal{A}$ tq C es nulo y $N \subseteq C$.

$B \subseteq B \cup \underset{0}{N} = A \cup M \subseteq A \cup C$

$$\Longrightarrow \mu(B) \leq \mu(A \cup C) \leq \mu(A) + \cancel{\mu(C)}$$

$$\Longrightarrow \mu(B) \leq \mu(A)$$

Análogo, $\mu(A) \geq \mu(B)$, ent $\mu(A) = \mu(B)$

i. **$\overline{\mathcal{A}}$ es σ-álgebra:**

a. $X \in \overline{\mathcal{A}}$: $X \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$.

b. si $A \in \overline{\mathcal{A}} \Longrightarrow X \setminus A \in \overline{\mathcal{A}}$: sea $A \in \overline{\mathcal{A}}$, ent

Sea $B \in \mathcal{A}$, $N \in \mathcal{N}$ tq $A = B \cup N$. Ent $X \setminus A = X \setminus B \cup N$

Como N es despreciable, $\exists C \in \mathcal{A}$ tq $\mu(C) = 0$ y $N \subseteq C$

Entonces $X \setminus A = X \setminus (B \cup N) = \underbrace{X \setminus (B \cup C)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{(C \setminus N)}_{\subseteq C, \text{ ent es despreciable}}$

$\Longrightarrow X \setminus A \in \overline{\mathcal{A}}$

c. Sean $(A_j)_j \subseteq \overline{\mathcal{A}} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \overline{\mathcal{A}}$: sea $(A_j)_j \subseteq \overline{\mathcal{A}}$. Ent. $\exists (B_j)_j, (C_j)_j \subseteq \mathcal{A}$, $(N_j)_j \subseteq \mathcal{N}$ tal que:

$(\forall j \in \mathbb{N})$

$$A_j = B_j \cup N_j, \quad N_j \subseteq C_j, \ \mu(C_j) = 0$$

$$\Longrightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \underbrace{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j\right)}_{\subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j}$$

y $\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j \in \mathcal{N}$, pues $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j) = 0$

$$\Longrightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \overline{\mathcal{A}}$$

d. $\overline{\mu}$ es una medida:

$\mu(\emptyset) = 0$, $\forall A \in \overline{\mathcal{A}}$, $\overline{\mu}(A) \geq 0$. Sean $(A_j)_j \subseteq \overline{\mathcal{A}}$ y sin restricción los A_j son pardisjuntos. Queremos probar que

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_j)$$

Sean $(B_j)_j, (C_j)_j \subseteq \mathcal{A}$ y $(N_j)_j \subseteq \mathcal{N}$ tq $\forall j \in \mathbb{N}$

$$A_j = B_j \cup N_j, \quad N_j \subseteq C_j, \quad \mu(C_j) = 0$$

En particular los B_j son pardisjuntos. Entonces

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \underset{\uparrow \ \mu \text{ es medida}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_j)$$

e. $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ es completo: los $\bar{\mu}$ despreciables son los mismos μ despreciables y $\mathcal{N} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$ por construcción.

f. Unicidad: sea $(\mathcal{A}', \mu')$ otra completación de $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Ent $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}'$, entonces $\bar{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}'$. Sean $B \in \mathcal{A}$, $N \in \mathcal{N}$. Entonces

$$\mu'(B \cup N) \leq \mu'(B) + \cancel{\mu'(N)}^{0} = \mu(B) = \bar{\mu}(B \cup N)$$

De manera análoga, $\bar{\mu}(B \cup N) \leq \mu'(B \cup N)$. Entonces $\bar{\mu} | \bar{\mu}|_{\bar{\mathcal{A}}}$.
Finalmente, podemos concluir que $(X, \mathcal{A}', \mu')$ es extensión de $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$. Pero $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ es completo.

ii. $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ es completación de $(X, \mathcal{A}, \mu)$: ya se probó en el paso anterior

obs:

$$\mathcal{M} := \{\mu^*\text{- medibles}\} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$$
$$\mathcal{M} := \{A \Delta N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$$
$$\mathcal{M} := \{A \subseteq X : \exists M, N \in \mathcal{N}, B \in \mathcal{A} \text{ tq } A \cup M = B \cup N\}$$
$$\mathcal{M} := \{M \subseteq X : \forall A \subseteq X,\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \setminus M)\}$$

Ahora sí, vamos a probar el teorema inicial.

dem: Basta probar que $\mathcal{M} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$. Sea $B \in \mathcal{M}$

caso 1: $\mu^*(B) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tome $A_{nk} \in \mathcal{A}$ tq

$$B \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk} \text{ y } \mu^*(B) + 1/n \geq \underset{\substack{\uparrow \\ \mu^* \text{ es el inf}}}{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk})}$$

$$\longrightarrow B \subseteq \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk}}_{\in \mathcal{A}} =: A$$

luego, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu^*(B) + 1/n \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \geq \mu(A)$

pero $\mu^*(A) = \mu(A)$, entonces

$$\mu^*(B) + 1/n \geq \mu^*(A) \geq \mu^*(B)$$

si $n \to \infty$, $\mu^*(B) = \mu^*(A) < \infty$

De manera análoga, para $A \setminus B$, $\exists C_j \in \mathcal{A}$ tq

$$A \setminus B \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{nk} =: C \in \mathcal{A}$$

$$\mu(C) = \mu^*(A \setminus B)$$

como $B \in \mathcal{M}$, entonces, $\mu^*(A) = \mu^*(\underbrace{A \cap B}_{= B}) + \mu^*(\underbrace{A \setminus B}_{\subseteq C})$

y además tenemos que

$$\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B) = \mu^*(B) + \mu^*(C) = \mu(A) + \mu(C)$$

como $\mu(A) < \infty$, entonces.

$$\mu^*(A) = \mu^*(A) + \mu(C)$$

$$\Longrightarrow \mu(C) = 0 \qquad (\mu(A) < \infty \,!)$$

$$\Longrightarrow B = (B \setminus C) \cup (B \cap C) = \underbrace{(A \setminus C)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{\overbrace{(B \cap C)}^{\subseteq C}}_{\in \mathcal{N}} \in \overline{\mathcal{A}}$$

caso 2: $\mu^*(B) = \infty$. como $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es σ-finito, entonces tome $(S_j)_j \subseteq \mathcal{A}$, par-disjuntos tal que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j = X, \quad \mu(S_j) < \infty \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Entonces $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} (S_j \cap B)$ y $\forall j \in \mathbb{N}$, $S_j \cap B \in \mathcal{M}$ y $\mu^*(S_j \cap B) \leq \mu^*(S_j) < \infty$. Entonces por el caso 1, $\forall j \in \mathbb{N}$, $S_j \cap B \in \overline{\mathcal{A}}$, pues como $\overline{\mathcal{A}}$ es σ-algebra,

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} (S_j \cap B) \in \overline{\mathcal{A}}$$

la medida de lebesgue:

Recall: $\mathcal{J} := \{ [a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a \leq b \}$ es un semianillo y $\lambda([a,b)) = b-a$ es un contenido.

def: La σ-algebra de Borel, $\mathcal{B}$, es:

$$\mathcal{B} := \sigma\text{-álgebra generada por } \mathcal{J}$$
$$\mathcal{B} := \sigma\text{-álgebra generada por la top. de } \mathbb{R}.$$

$\mathfrak{m}$ es σ-álgebra, $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{m}$ ($\mathcal{B} \neq \mathfrak{m}$). { Hewitt, Stromberg. (10 21)

obs:

i. λ tiene extensión única a $\mathcal{B}$. (medida de Borel-Lebesgue)

ii. λ tiene extensión única a $\mathfrak{m}$ (medida de lebesgue)

teorema: λ, la medida de lebesgue, en $\mathbb{R}$ y $\mathfrak{m}$ los conjuntos λ medibles. Sea $A \in \mathfrak{m}$, entonces:

i. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, U \subseteq \mathbb{R}$ abierto tq $A \subseteq U$, $\lambda(U \setminus A) < \varepsilon$

ii. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists B \subseteq \mathbb{R}$ cerrado tq $B \subseteq A$, $\lambda(A \setminus B) < \varepsilon$.

dem:

i. Sea $\varepsilon > 0$ y A medible. Como $\mathbb{R}$ es σ finito, tenemos dos casos.

caso 1, $\lambda(A) < \infty$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists [a_n, b_n)$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda([a_n, b_n)) \leq \lambda(A) + \varepsilon/2$

$\forall n \in \mathbb{N}$ escoja (α_n, b_n) tq $(\alpha_n, b_n) \supseteq [a_n, b_n)$ y $\lambda((\alpha_n, b_n) \setminus [a_n, b_n)) < \varepsilon/2^n$

$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, b_n)$ abierto, entonces como $\lambda(A) < \infty$,

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, b_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\alpha_n, b_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda([a_n, b_n)) + \varepsilon/2^n$$

$$\leq \lambda(A) + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \lambda(A) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n) \setminus A\right) \leq \varepsilon$$

caso 2, $\lambda(A) = \infty$: Tomo $S_j \in m$, por disjuntos, tq $\forall j \in \mathbb{N}$, $\lambda(S_j) < \infty$ y $\mathbb{R} = \dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} S_j$. sea $A_j := A \cap S_j$

por caso 1, podemos escoger B_j abiertos con $A_j \subseteq B_j$, $\lambda(B_j \setminus A_j) < \varepsilon/2^j$, $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ abierto, ent

$$\lambda(B \setminus A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j \setminus A_j) < \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon/2^j < \varepsilon$$

ii. Tomar complementos

2 · 9 · 2014

teorema: sea f $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua por izquierda y creciente, entonces $f = g + h$, donde h es continua y g es una función de salto.

dem: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua por izq y creciente.

Defina

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{y \to x^+} f(y) \neq f(x)\}$$

A es contable. Sea $p: A \to (0, \infty)$, $p(x) = \lim_{y \to x^+} f(y) - f(x)$

y considere

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{y \in A \cap [0, x)} p(x) & x > 0 \\ -\sum_{y \in A \cap [x, 0)} p(x) & x \leq 0 \end{cases}$$

$\sum_{y\in A\cap[-n,n]} p(y)<\infty \quad \forall n\in\mathbb{N}$, ent

$$\bigcup_{x\in A\cap[-n,n]} [f(x), \lim_{y\to x^+} f(y)) \subseteq [f(-n), \lim_{y\to n^+} f(y)]$$

Sean $x_1, x_2\in A$, $x_1<x_2$

$$\Longrightarrow f(x_1) < \lim_{y\to x_1^+} f(y) \leq f(x_2) < \lim_{y\to x_2^+} f(y)$$

$$\Longrightarrow \sum_{y\in A\cap[-n,n]} p(y) < \lim_{y\to n^+} f(y) - f(-n) < \infty$$

y $p(x)\geq 0$, $x\in A$. Veamos ahora que g es creciente

Caso 1, $0<x_1<x_2$

Caso 2, $x_1<x_2<0$

Caso 3, $x_1\leq 0<x_2$

En cualquier caso,

$$g(x_2)-g(x_1) = \sum_{y\in A\cap[x_1,x_2)} p(y)\geq 0.$$

Sea $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h: f-g$. Veamos que h es creciente,

sean $x_1<x_2\in\mathbb{R}$, entonces:

$$h(x_2)-h(x_1) = f(x_2)-f(x_1)-(g(x_2)-g(x_1))$$

$$= f(x_2)-f(x_1)-\sum_{y\in A\cap[x_1,x_2)} p(y)$$

$$\Longrightarrow \bigcup_{x\in[x_1,x_2)\cap A} [f(x), \lim_{y\to x^+} f(y)) \leq [f(x_1), f(x_2))$$

$$\Longrightarrow 0\leq \sum_{y\in[x_1,x_2)\cap A} p(y) \leq f(x_2)-f(x_1)$$

$$\Longrightarrow h(x_2)-h(x_1)\geq 0.$$

Veamos ahora que h es continua,

h es continua por izq, pues f y g lo son. Veamos que es continua por derecha. Sea $x \in \mathbb{R}$, sin restricción $x > 0$, sea $z_n \downarrow x$, $z_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} h(z_n) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} f(z_n)}_{\text{lím der exist.}} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{y\in [0,z_n]\cap A} p(y)}_{\text{lím der existe}} \Big\} \text{crecientes}$$

este lím existe.

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} h(z_n) - h(x) = \lim_{n\to\infty} - \sum_{z\in (x,z_n)} p(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} h(z_n) - h(x) = 0$$

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$:

Proposición: si λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, ent λ es invariante bajo translación. Es decir, si tengo $M \in \mathcal{M}$ y $y \in \mathbb{R}$, entonces $y + M \in \mathcal{M}$ y $\lambda(y+M) = \lambda(M)$

dem: sea $M \in \mathcal{M}$ y sea $y \in \mathbb{R}$.

caso 1: $M = [a,b)$ //

caso 2: si no, sea $M \in \mathcal{M}$, ent por caso 1 y def de $\lambda = ((\lambda|_{\mathcal{J}})^*)|_{\mathcal{M}}$ obtenemos que $\lambda^*(M) = \lambda^*(y+M)$ $\forall M \subseteq \mathbb{R}$. Entonces M es medible ssi $y + M$ es medible y $\lambda(M) = \lambda^*(M) = \lambda^*(y+M) = \lambda(y+M)$

Funciones medibles e integración:

def: sean $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra sobre X, un espacio medible es el par $(X, \mathcal{A})$

def: sean $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ dos espacios medibles y tengo $f: X \to Y$, f se dice **medible** si $\forall B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

lema: sean $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ espacios medibles. si

a. $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$ tq $\mathcal{E}$ genera a $\mathcal{B}$,
b. $f: X \to Y$

Ent f es medible ssi $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, $\forall B \in \mathcal{E}$

lema: sean $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$, $(Z, \mathcal{L})$. si

$f: X \to Y$ medible
$g: Y \to Z$ medible

$\Rightarrow$ $g \circ f$ es medible

dem: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Recall: sea (X, τ) un espacio topológico, ent tenemos $\mathcal{B}$ la sigma-álgebra de Borel.

def: sean (X, τ_1), (Y, τ_2) esp topológicos. $f: X \to Y$ es Borel medible si f es $\mathcal{B}(\tau_1)$ - $\mathcal{B}(\tau_2)$ medible

lema: sean X, Y espacios topológicos y $f: X \to Y$, entonces si f es continua, f es medible

ej:

$$| \; | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |x| \text{ es medible}$$

lema: sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y sean (Y_1, τ_1), (Y_2, τ_2) espacios topológicos. si $f: X \to Y_1 \times Y_2$ Entonces f es medible ssi f_1 y f_2 son medibles. Donde $f = (f_1, f_2)$ y $f_1 = \pi_1 \circ f$, $f_2 = \pi_2 \circ f$.

dem:

si f es medible, ent $f_j = \pi_j \circ f$ es medible, pues π_j es continua en particular es medible.

si f_1 y f_2 son medibles, ent como la topología en $Y_1 \times Y_2$ es generado por $\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2\}$

sean $A_1 \in \tau_1$, $A_2 \in \tau_2$, ent

$$f^{-1}(A_1 \times A_2) = \underbrace{f_1^{-1}(A_1)}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{f_2^{-1}(A_2)}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

$\Rightarrow$ f es medible.

Funciones con valores en $\mathbb{R}$ o $\overline{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{C}$

Topología en $\overline{\mathbb{R}}$: $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ es abierto ssi $U \cap \mathbb{R}$ es abierto en $\mathbb{R}$

y

si $\infty \in U$, $\exists a \in \mathbb{R}$ tq $(a, \infty] \subseteq U$
si $-\infty \in U$, $\exists a \in \mathbb{R}$ tq $[-\infty, a) \subseteq U$

ej: $\| \ \| : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible.

lema (caracterización de f. medibles con valores en $\overline{\mathbb{R}}$): sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, ent f es medible ssi $\forall a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{A}$ o ssi $\forall a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$ o ssi $\forall a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([a, \infty])$ o ssi $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{A}$

dem: $\{[-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$ genera la topología de $\overline{\mathbb{R}}$

lema: sean f, g medibles, entonces:

$$f+g, \ fg, \ f/g \ (g \neq 0), \ |f|$$

son medibles

lema: sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, entonces

i. $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$

f es medible ssi $\operatorname{Im} f$ y $\operatorname{Re} f$ son medibles

ii. $f\ X \longrightarrow \mathbb{R}$

definimos $f^+\ X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f^+ = \max\{0, f\}$ y $f^-\ X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f^- = \max\{0, -f\}$. $f^+, f^- \geq 0$ y $f = f^+ - f^-$. Ent f es medible ssi f^+ y f^- son medibles

dem:

"$\Longleftarrow$": //

"$\Longrightarrow$":

$$f_+ = \frac{1}{2}\Big(\overset{\text{medible}}{f} + \overset{\text{medible}}{|f|} \Big)$$

$$f^- = \frac{1}{2}\Big(\underset{\text{medible}}{-f} + \underset{\text{medible}}{|f|} \Big)$$

$|f| = f_+ + f_-$

04 09. 2014

funciones medibles en $\mathbb{R}$:

def: $f\ (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible ssi $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}$

$$f^{-1}([a, \infty]) \in \mathcal{A}$$

obs: $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son Borel medibles, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ es cerrado, ent $\{x\} \in \mathcal{B}$ y $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$ unión contable de medibles.

si $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{B}$

Sea $f\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases}$

sea $A \subseteq \mathbb{R}$, conjunto no medible

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } 1 \in A,\ -1 \notin A \\ \mathbb{R}/\mathbb{Q} & \text{si } 1 \notin A,\ -1 \in A \\ \mathbb{R} & \text{si } \{-1, 1\} \subseteq A \\ \emptyset & \text{si } 1 \notin A,\ -1 \notin A \end{cases}$$

Si $M \subseteq \mathbb{R}$ es no medible y

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in M \\ -1 & x \in \mathbb{R} \setminus M \end{cases}$$

$\longrightarrow |f| = 1$ medible, pero f no es medible

Proposición: sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones tq $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ son medibles. Entonces:

i) $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ son medibles

ii) $\liminf\limits_{n \to \infty} f_n$, $\limsup\limits_{n \to \infty} f_n$ son medibles

iii) $\lim\limits_{n \to \infty} f_n$ es medible si existe

donde $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$(\sup f_n)(x) := \sup_{x \in X} (f_n(x))$$

dem:

i) Basta con probarlo para el sup. Sea $f := \sup f_n$, queremos probar que $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}$

$$f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{A}$$

$$\begin{aligned}
\longrightarrow x \in f^{-1}((a,\infty]) &\Longleftrightarrow f(x) > a \\
&\Longleftrightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \{ f_n(x) \} > a \\
&\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tq } f_k(x) > a \\
&\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tq } x \in f_k^{-1}((a,\infty]) \\
&\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{f_k^{-1}((a,\infty])}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

unión contable de medibles

$\longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ es medible

como $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n = -\sup_{n\in\mathbb{N}}(-f_n)$ y $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ es medible

ii) $\lim_{n\to\infty} \inf f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\Big(\underbrace{\inf_{k\geq n} f_k(x)}_{\text{creciente en } n}\Big)$

$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k(x)$

$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} \inf f_n = \underbrace{\sup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\inf_{k\geq n} f_k}_{\text{medible}}}_{\text{medible}} \Big\}$ medible.

$\lim_{n\to\infty} \sup f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_k$

También es medible

iii) si $\lim_{n\to\infty} f_n$ existe, $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim\inf f_n = \lim\sup f_n$ que es medible

def: sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Una propiedad es válida en μ-almost everywhere si el conjunto donde la propiedad no vale es despreciable

Proposición: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida completo.

$f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

Suponga que $f \equiv g$ μ Almost everywhere.

Ent f es medible ssi g es medible

dem:

sea f medible y defina

$A = \{x\in X : f(x) \neq g(x)\}$ despreciable

como $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es completo, $A \in \mathcal{A}$

sea $M \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ medible, queremos determinar quién es

$$g^{-1}(M)$$

pero $g^{-1}(M) = \{x \in X : g(x) \in M\}$

$$= \{x \in X : g(x) \in M \text{ y } g(x) = f(x)\}$$
$$\cup \{x \in X : g(x) \in M \text{ y } g(x) \neq f(x)\}$$

como $f \equiv g$ A E.

$$g^{-1}(M) = \underbrace{(f^{-1}(M) \setminus A)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{(g^{-1}(M) \cap A)}_{\subseteq A}$$

despreciable y por completitud del espacio está en $\mathcal{A}$

$\Longrightarrow g^{-1}(M) \in \mathcal{A}$

la otra dirección es análoga.

Extensión de "medible". sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $D \subseteq X$ despreciable

$$f : X \setminus D \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

Ent f es medible si tiene extensión medible. En este caso, si g_1 y g_2 son extensiones medibles de f, entonces

$$g_1 \equiv g_2 \quad \mu \text{ A E}$$

Aproximación de funciones medibles por funciones simples

def: sea X un conjunto y $M \subseteq X$, entonces la función característica de M es

$$\chi_M : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin M \\ 1 & \text{si } x \in M \end{cases}$$

obs: $(X, \mathcal{A})$ esp medible, $M \subseteq X$, ent χ_M es medible ssi M es medible

def: sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. una función
$$\varphi : X \to \mathbb{R}$$
es una función simple si es medible y φ sólo tiene finitos valores. Es decir $|Rg\, \varphi| < \infty$.

Proposición: sean $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $g : X \to \mathbb{R}$. Entonces es equivalente

i) g es simple

ii) $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. $M_1, \dots, M_n \subseteq X$ medibles par disjuntos tq $g = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{M_j}$

iii) g es medible y $\exists\, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$, $\exists\, N_1, \dots, N_m \subseteq X$, tq $g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{N_j}$

dem:

i) $\Rightarrow$ ii) sup que g es simple. sea $Rg(g) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ con $\alpha_j \neq \alpha_k$, $(j \neq k)$ Defina M_j como
$$M_j = \underbrace{g^{-1}(\{\alpha_j\})}_{\text{medible}} \quad (j = 1, \dots, n)$$
$$\Rightarrow g(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{M_j}(x)$$
observe que $M_j \cap M_k = \emptyset \quad (j \neq k)$

ii) $\Rightarrow$ iii) Es claro, pues la representación se tiene y g es suma de medibles

iii) $\Rightarrow$ i) Basta probar que $|Rg(g)| < \infty$
$$\Rightarrow |Rg(g)| \leq \left| \left\{ \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \beta_j : \varepsilon_j \in \{0, 1\} \right\} \right| \leq 2^m < \infty$$