29/07/14

2 parciales 25% c/u
1 final 25%
talleres semanales 25%

Elstrodt, Maß und Integrationstheorie
Halmos, Measure Theory
Stein, Shakarchi, Measure theory, integration spaces
Teschl

1. Anillos, Álgebras, contenidos y medidas:

1.1 Anillos y álgebras:

def: sea X conjunto, $A, B \subseteq X$

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \quad (\text{dif. simétrica})$$
$$= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

obs:

$A \Delta A = \emptyset$ $\qquad$ $A \Delta X = X \setminus A$

$A \Delta \emptyset = A$.

teorema: sea X un conjunto, ent $\mathbb{P}X$ es un anillo conmutativo con 1 con Δ como adición y $\cap$ como la multiplicación.

$\emptyset = 0, X = 1$

dem: sean $\mathbb{K} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ un campo y $R = \{f : X \to \mathbb{K}\}$ (es un anillo conmutativo con 1).

los elementos de R son f características. sea $\psi : \mathbb{P}X \to R$, $A \mapsto \chi_A$ es una biyección. sean $A, B \subseteq X$

$$\psi(A \cap B) = \chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$$

$$\psi(A \Delta B) = \chi_{A \Delta B} = \chi_{(A \setminus B) \dot\cup (B \setminus A)}$$

$$= \chi_{A \setminus B} + \chi_{B \setminus A}$$

la unión disjunta de caract. es la suma

$$= \chi_{A \setminus B} + \underbrace{\chi_{A \cap B} + \chi_{A \cap B}}_{} + \chi_{B \setminus A}$$

$\chi_{A \cap B} = \bar{0}$ ó $\bar{1}$ $\Rightarrow$ $\chi_{A \cap B} + \chi_{A \cap B} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$ ó $= \bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$

$$= \chi_A + \chi_B$$

Entonces ψ es un isomorfismo entre $(\mathbb{P}X, \Delta, \cap)$ y $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Ent $(\mathbb{P}X, \Delta, \cap)$ es un anillo con

$$0 = \psi^{-1}(0) = \psi^{-1}(\chi_\emptyset) = \emptyset$$
$$1 = \psi^{-1}(1) = \psi^{-1}(\chi_X) = X$$

i) $R \subseteq \mathbb{P}X$ es un anillo sobre X si es un subanillo de $(\mathbb{P}X, \Delta, \cap)$

ii) $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}X$ es un álgebra sobre X si es un anillo y $X \in \mathcal{A}$

teorema: sea X un conjunto, $R \subseteq \mathbb{P}X$ Entonces es equivalente.

i) R es un anillo
ii) $\emptyset \in R$ y $\forall A, B \in R$, $A \Delta B \in R$ y $A \cap B \in R$
iii) $\emptyset \in R$ y $\forall A, B \in R$, $A \Delta B \in R$ y $A \cup B \in R$
iv) $\emptyset \in R$ y $\forall A, B \in R$, $A \cup B \in R$ y $A \setminus B \in R$

dem:

i) $\Rightarrow$ ii) claro.
ii) $\rightarrow$ i) claro
ii) $\Rightarrow$ iii) sean $A, B \in R$ como $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ Ent

$$R \ni (A \Delta B) \Delta (A \cap B) = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$$
$$= A \cup B$$

iii) $\Rightarrow$ iv)

$$A \setminus B = (A \cup B) \Delta A$$

iv) $\Rightarrow$ ii)

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in R$$
$$A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B) \in R$$

teorema: sea X conjunto, $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}X$, ent son equivalentes

i) $\mathcal{A}$ es un álgebra
ii) $X \in \mathcal{A}$ y $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $X \setminus A \in \mathcal{A}$, $A \cup B \in \mathcal{A}$.
iii) $X \in \mathcal{A}$ y $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $X \setminus A \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$

dem:

i) $\Rightarrow$ ii) //
ii) $\Rightarrow$ iii) $A \cap B = X \setminus [(X \setminus A) \cup (X \setminus B)]$
iii) $\Rightarrow$ i) Es suficiente probar $A \Delta B \in \mathcal{A}$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$ (por el teorema anterior, sabemos que $\mathcal{A}$ es un anillo)

$$A \Delta B = X \setminus ((A \cap B) \cup [(X \setminus A) \cap (X \setminus B)])$$
$$= X \setminus A \cap B \cap X \setminus [(X \setminus A) \cap (X \setminus B)] \in R$$

ejemplos:

α) X conjunto, $\mathbb{P}X$ es un anillo y un álgebra
β) X conjunto, $\{\emptyset\}$ es un anillo
γ) $A \subseteq X$, $\{\emptyset, A\}$ es un anillo
$\{\emptyset, A, X, X \setminus A\}$ es un álgebra

δ) $X \neq \emptyset$, $E = \{A \subseteq X : |A| \leq n\}$ es un anillo, es un álgebra si X es finito
ε) $X \neq \emptyset$, $E = \{A \subseteq X : \underbrace{|A| \leq |\mathbb{N}|}_{\text{contable}}\}$ es un anillo, es un álgebra si X es contable
ζ) $|X| \leq |\mathbb{N}|$ $E = \{A \subseteq X : A$ ó $X \setminus A$ es finito$\}$ es un anillo.

def: sea X un conjunto

i) $R \subseteq \mathbb{P}X$ es un σ-anillo sobre X si es un anillo sobre X y para $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq R$, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in R$

ii) $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}X$ es una σ-álgebra sobre X si es un álgebra sobre X y para $(A_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$

teorema: sea X un conjunto y $R \subseteq \mathbb{P}X$, $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}X$

i) R es un σ-anillo si y sólo si $\emptyset \in R$, $A, B \in R \Rightarrow A \setminus B \in R$ y $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \rightarrow \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in R$

ii) $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra ssi $X \in \mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X / A \in \mathcal{A}$ y si $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$. (lo que es equivalente a $X \in \mathcal{A}$, si $A \in \mathcal{A}$, ent $X \setminus A \in \mathcal{A}$ y si $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, ent $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$

dem:

i) "$\Rightarrow$": ✓

"$\Leftarrow$": sean $A, B \in R$, $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_j = \emptyset$ $j \geq 3$

$\rightarrow A \cup B = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in R$ ✓

ii) A $\Rightarrow$ B ✓

B $\Rightarrow$ A como en la prueba anterior.

B $\Rightarrow$ C: De Morgan

ejemplos:

i) $\mathbb{P}X$ es una σ-álgebra

ii) cada anillo ó álgebra finito es σ-anillo ó σ-álgebra

iii) X conjunto. $E = \{A \subseteq X : A$ es contable$\}$ es un σ-anillo

iv) X, Y conjuntos, $f: X \rightarrow Y$ sea C una σ (álgebra o anillo) sobre Y

Ent $f^{-1}(C) := \{f^{-1}(A) : A \in C\}$ es σ-álgebra o anillo sobre X

v) caso especial

$X \in Y$, $f: X \rightarrow Y$, $f(x) = x$; C σ-anillo/álgebra sobre Y

$$f^{-1}(C) =: \text{traza de } C \text{ sobre } Y = C|_X$$
$$= \{A \cap X : A \in C\}$$

def: sea X un conjunto, $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{P}X$ es un semianillo sobre X si

i) $\emptyset \in \mathcal{H}$

ii) $A, B \in \mathcal{H} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{H}$

iii) si $A, B \in \mathcal{H} \rightarrow \exists \underbrace{C_1, \ldots, C_n}_{\text{disjuntos}} \in \mathcal{H}$ tq $A \setminus B = \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} C_j$

ejemplos:

i) cada anillo es un semianillo.

ii) $I = \{ [a,b) : a,b \in \mathbb{R} \ a \leq b \}$
$J = \{ (a,b] : a,b \in \mathbb{R} \ a \leq b \}$ $\Big\}$ son semianillos sobre $\mathbb{R}$

lema: sean X, Y conjuntos. y sean H, K semianillos sobre X e Y. Entonces

$$H \times K := \{ A \times B : A \in H, B \in K \}$$

es un semianillo sobre $X \times Y$

dem:

i) $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in H \times K$

ii) sean $C_1 = A_1 \times B_1$ y $C_2 = A_2 \times B_2 \in H \times K$

$$C_1 \cap C_2 = (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = \underbrace{(A_1 \cap A_2)}_{\in H} \times \underbrace{(B_1 \cap B_2)}_{\in K}$$

iii) $C_1 \setminus C_2 = ((A_1 \setminus A_2) \times B_1) \cup (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)$

$\Longrightarrow H \times K$ es un semianillo.

($A_1 \setminus A_2$ no nec está en H, pero $\exists E_1, \dots, E_n$ tq $A_1 \setminus A_2 = \bigcup_{j=1}^{n} E_j = A_1 \setminus A_2$)

Corolario: sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $(a_j)_{j=1}^n, (b_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Defina $\vec{a} \leq \vec{b}$ ssi $a_j \leq b_j \ \forall j \in [\![1, n]\!]$, y $[a,b) = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) \in \mathbb{R}^n$ (igual para $(a,b]$)

$\Longrightarrow I^n = \{ [a,b) : a,b \in \mathbb{R}^n, a \leq b \}$
$I^n = \{ (a,b] : a,b \in \mathbb{R}^n, a \leq b \}$ $\Big\}$ son semianillos sobre $\mathbb{R}^n$

def: sea X un conjunto, $Y \subseteq \mathbb{P}X$ (obs $\mathbb{P}X$ es todo lo que queremos con $Y \subseteq \mathbb{P}X$)

El anillo generado por Y es el anillo más pequeño (bajo inclusión) que contiene a Y. se denota por $R(Y)$. $R(Y)$ es dado por

$$R(Y) = \bigcap_{R \in R_0} R$$

con $R_0 = \{$anillos sobre X que contienen a $Y\}$

31/07/14

$R \subseteq \mathbb{P}X$ es un anillo sobre X ssi

i. $\emptyset \in R$, $\forall A, B \in R \Longrightarrow A \Delta B \in R$, $A \cup B \in R$

ii. $\emptyset \in R$, $\forall A, B \in R \Longrightarrow A \Delta B \in R$, $A \cap B \in R$

iii. $\emptyset \in R$, $\forall A, B \in R \Longrightarrow A \cup B \in R$, $A \setminus B \in R$

$A \subseteq \mathbb{P}X$ es un álgebra sobre X ssi:

σ-anillo: $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq R \Rightarrow \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in R$
σ-álgebra: $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq A \Rightarrow \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in A$

$H \subseteq \mathbb{P}x$ es un semianillo ssi:

i. $\emptyset \in H$
ii. $A, B \in H \Rightarrow A\cap B \in H$
iii. $A, B \in H \Rightarrow \exists\, C_1, \dots, C_n \in H$ tq $A\setminus B = \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} C_j$.

obs:

a. $\mathbb{P}x$ es σ-anillo, σ-álgebra
b. intersecciones de anillos, σ-anillos, álgebras, σ-álgebras son nuevamente anillos, σ-anillos, álgebras, σ-álgebras

ej: Sea X conjunto, $Y \subseteq \mathbb{P}x$. El álgebra generada por Y (A_Y)

$$A_Y = \bigcap_{a\in A} a \quad \text{donde} \quad A = \{a \subseteq \mathbb{P}x : a \text{ es algebra y } Y \subseteq a\}$$

caso especial: si X es un espacio topológico con topología $\tau \subseteq \mathbb{P}x$

$$\mathcal{B}(\tau) := \sigma\text{-álgebra generada por } \tau$$

sigma álgebra de Borel

teorema: Sea X un conjunto y $H \subseteq \mathbb{P}x$ un semianillo sobre X

$$\underbrace{R(H)}_{\text{anillo generado por } H} = \left\{ \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} A_j : n\in\mathbb{N},\ A_j \in H \right\} := R$$

dem: Es claro que $R \subseteq R(H)$. Ahora bien, es suficiente mostrar que R es un anillo. Es decir queremos ver que $\emptyset \in R$, $A\setminus B \in R$ y $A\cup B \in R$, $\forall A, B \in R$.

i. $\emptyset \in R$: $\emptyset \in H \subseteq R$

Sean $A, B \in R$ y sean $M_1, \dots, M_m$ $N_1, \dots, N_n \in H$ tq

$$A = \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} N_j, \quad B = \dot{\bigcup}_{j=1}^{m} M_j$$

ii. $A\setminus B \in R$: Por inducción en m

caso base $m=1$: $A\setminus B = \left(\dot{\bigcup}_{j=1}^{n} N_j\right)\setminus M_1 = \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} \underbrace{(N_j\setminus M_1)}_{R} \in H$

$= \dot{\bigcup}_{i=1} B_{jk}$ con $B_{jk} \in H$

Paso inductivo: $(A\setminus B) = A\setminus\left(\bigcup_{j=1}^{m+1} M_j\right)$

iii) $A \cup B \in R$

caso 1 $(A \cap B = \emptyset)$: $A \cup B = A \,\dot\cup\, B = \left(\dot\bigcup_{j=1}^{n} N_j\right) \dot\cup \left(\dot\bigcup_{j=1}^{m} N_j\right)$

caso 2 $(A \cap B \neq \emptyset)$: $A \cup B = \underbrace{A}_{\in R} \,\dot\cup\, \underbrace{(B \setminus A)}_{\in R \text{ por ii}} \in R$ por el caso 1

Ent R es un anillo.

def: sea X un conjunto, $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{P}X$ es una clase monótona si

i. $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \Rightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{M}$

ii. $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots \rightarrow \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{M}$

obs:

a. $\mathbb{P}X$ es clase monótona

b. intersecciones de clases monótonas son clases monótonas

según lo anterior, tiene sentido hablar de la clase monótona generada por $Y \subseteq \mathbb{P}X$

c. cada σ-álgebra es una clase monótona

use $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = X \setminus \left[\bigcup_{j=1}^{\infty} (X \setminus A_j)\right]$ para $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$

c' cada σ-anillo es una clase monótona.

use $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \setminus \left[\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_j)\right]$ para $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$

d. R anillo monótono $\Longrightarrow$ σ-anillo

sean $(A_j)_{j=1}^{\infty} \in R$. sea $B_k = \bigcup_{j=1}^{k} A_j \in R$. $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \ldots$

$\Longrightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in R$

teorema: sea X un conjunto y R un anillo sobre X. si S es el σ-anillo generado por R y $\mathcal{M}$ la clase monótona generada por R, entonces

$$S = \mathcal{M}$$

dem: $\mathcal{M} \subseteq S$ es claro (cada σ-anillo es una clase monótona y $\mathcal{M}$ es la clase monótona más pequeña

$S \subseteq \mathcal{M}$: Basta probar que $\mathcal{M}$ es un anillo. Fije $A \in \mathcal{M}$

$$Q(A) = \{B \subseteq X : A \setminus B,\ B \setminus A,\ A \cup B \in \mathcal{M}\}$$

observaciones:

i) $A, B \in \mathcal{M} \longrightarrow A \in Q(B) \iff B \in Q(A)$ (ii)

γ) $A \in R \Rightarrow R \subseteq Q(A) \Rightarrow \mathcal{M} \subseteq Q(A)$ (i)
↳ clase monótona generada por R

δ) $B \in \mathcal{M}$, $\forall A \in R \xrightarrow{(i)} B \in Q(A) \xrightarrow{(ii)} A \in Q(B) \Rightarrow B \subseteq Q(B)$
$\Rightarrow \mathcal{M} \subseteq Q(B)$

Sean $\bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{M}$, ent $\bar{A} \in Q(\bar{B})$, ent $\bar{A} \setminus \bar{B}$, $\bar{B} \setminus \bar{A}$, $\bar{A} \cup \bar{B} \in \mathcal{M}$. Ent $\mathcal{M}$ es un anillo.

Corolario: sea X conjunto y $\mathcal{A}$ un álgebra sobre X. Ent la clase monótona generada por $\mathcal{A}$ es igual a la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$

def: $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{P}X$ es un sistema de Dynkin si

$\emptyset \in \mathcal{D}$ {
i. $X \in \mathcal{D}$
ii. $A \in \mathcal{D} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{D}$
iii. $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}$ disjuntos entre sí $\rightarrow \dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{D}$ (ojo, aquí es sólo para conjuntos disjuntos)

ej:
a. $\mathbb{P}X$ es un sistema de Dynkin

teorema: sea X un conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{P}X$ Ent $\mathcal{D}$ es un sistema de Dynkin si y sólo si
α) $X \in \mathcal{D}$
β) $A, B \in \mathcal{D}$ con $B \subseteq A \rightarrow A \setminus B \in \mathcal{D}$
γ) $\mathcal{D}$ es clase monótona

dem:
"⟹": sea $\mathcal{D}$ un sistema de Dynkin. Ent $X \in \mathcal{D}$.
ii) sean $A, B \in \mathcal{D}$ con $B \subseteq A$

$$A \setminus B = X \setminus [(B \dot{\cup} (X \setminus A))]$$
$$= X \setminus [B \dot{\cup} (X \setminus A) \dot{\cup} \emptyset \dot{\cup} \emptyset \dot{\cup} \dots] \in \mathcal{D}$$

iii) $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ tq $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$
sea $B_1 = A_1$, $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus (\bigcup_{j=1}^{n} A_j)$, $n \geq 1$
$\rightarrow B_j$ son disjuntos entre sí y $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{D}$

$(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ tq $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$, queremos ver que $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{D}$

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \setminus \Big(\underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_j)}_{\in \mathcal{D}} \Big) \in \mathcal{D}$$

"$\Leftarrow$": sean $A, B \in \mathcal{D}$ con $A \cap B = \emptyset$

$$X \setminus (A \cup B) = \underbrace{(X \setminus A)}_{\in \mathcal{D}} \setminus \underbrace{B}_{\in \mathcal{D}} \in \mathcal{D}$$

$$\Rightarrow \quad A \cup B = X \setminus \underbrace{[(X \setminus A) \setminus B]}_{\in \mathcal{D}} \in \mathcal{D}$$

sean $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{D}$ disjuntos entre sí. sea $B_k = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} A_j \in \mathcal{D}$, ent $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$

$$\Rightarrow \dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{D}$$

Corolario: sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{P}X$ un sistema de Dynkin, ent $\mathcal{D}$ es $\cap$-estable ssi $\mathcal{D}$ es σ-álgebra.

obs: $\cap$-estable $\Rightarrow$ $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D}$

dem:

"$\Leftarrow$": por el teorema anterior + σ-álgebra.

"$\Rightarrow$":

teorema: sea $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{P}X$ estable bajo intersecciones, $\mathcal{D}$ = sistema de Dynkin generado por $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{A}$ = σ algebra generado por $\mathcal{Y}$. ent

$$\mathcal{D} = \mathcal{A}$$

dem: $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ es de Dynkin y $\mathcal{D}$ es el sist de Dynkin más pequeño).

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$: Basta probar que $\mathcal{D}$ es una σ-álgebra pero, según lo anterior, es suficiente probar que $\mathcal{D}$ es $\cap$-estable.

sea $A \in \mathcal{D}$ y defina $Q(A) = \{B \subseteq X : A \cap B \in \mathcal{D}\}$. sea $A \in \mathcal{Y} \Rightarrow$ $\mathcal{Y} \subseteq Q(A)$, pues $\mathcal{Y}$ es $\cap$-estable

$Q(A)$ es un sistema de Dynkin, ent $\mathcal{D} \subseteq Q(A)$. sea $B \in \mathcal{D}$, ent $\forall A \in \mathcal{Y}$, $B \in Q(A)$, ent $A \in Q(B)$ por def de $Q(B)$

$\Rightarrow \mathcal{D} \in Q(B)$

luego $\forall \bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{D}$, $\bar{A} \in Q(\bar{B})$, $\bar{B} \in Q(\bar{A})$.

Contenidos y medidas:

def: sea X un conjunto y $\mathcal{H}$ un semianillo sobre X

$$\mu : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

μ es un **contenido** sobre $\mathcal{H}$ si

i) $\mu(\emptyset) = 0$

μ es una **Premedida** si en vez de aditividad se tiene σ-aditividad

iii) σ-aditividad: $(A_j)_j \subseteq \mathcal{H}$, disjuntos entre sí tq $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{H}$

$$\Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

μ es una **medida** si $\mathcal{H}$ es una σ-álgebra. En este caso $(X, \mathcal{H}, \mu)$ es un espacio de medida. Un contenido/premedida o medida/ es finito, si $\forall A \in \mathcal{H}$, $\mu(A) < \infty$

Convención: $a \in \mathbb{R}$, $a + \infty = \infty$. Si $a \in \mathbb{R}^{>0}$, $a\infty = \infty$

$$\infty \cdot \infty = \infty + \infty = \infty$$

Teorema (principio maximal de Hausdorff): Todo conjunto parcialmente ordenado contiene una cadena maximal

05/08/14

def: sea X un conjunto y $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{P}X$ un semianillo. Sea $\mu: \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, μ es un contenido si

i. $\mu(\emptyset) = 0$
ii. positiva: $\mu(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{H}$
iii. aditiva: si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H}$, disjuntos y $\dot{\bigcup}_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{H}$, ent

$$\mu\left(\dot{\bigcup}_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$

def: μ es un contenido si es un contenido y es σ-aditiva, esto q:

$$(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H} \text{ tq son disjuntos y } \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{H}$$

$$\Longrightarrow \mu\left(\dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

def: μ es una medida si μ es una premedida y $\mathcal{H}$ es una σ-álgebra

def: μ es finita ssi $\forall A \in \mathcal{H}$, $\mu(A) < \infty$

observaciones:

a. sean $A_1, A_2, \ldots$ con por lo menos un j tq $\mu(A_j) = \infty$, ent $\sum_j \mu(A_j) = \infty$
b. $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ siempre converge en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y converge incondicionalmente
c. $\mu(\emptyset) = 0$ excluye la posibilidad que $\mu(A) = \infty$ $(A \in \mathcal{H})$

si μ es finita, entonces $\mu(\emptyset) = 0$ es consecuencia de la aditividad de μ

$(\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cup \emptyset) \underset{\text{adit}}{=} \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset))$.

$a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$

ii) sea $\mathcal{A}$ un semianillo sobre X

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ \infty, & A \neq \emptyset \end{cases}$$

iii) **Medida de Conteo:** sea X un conjunto y $\mathcal{A} = \mathbb{P}X$.

$\mu\ \mathbb{P}X \to \mathbb{R}$

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{si } A \text{ es finito} \\ \infty & \text{si } A \text{ no es finito.} \end{cases}$$

μ es una medida.

iv) **Medida de Dirac:** sea X un conjunto y fijemos $a \in X$

$\mu_a\ \mathbb{P}X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$\mu_a(B) = \begin{cases} 1, & a \in B \\ 0, & a \notin B \end{cases}$$

μ es una medida.

generalización: sean $(a_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq X$, $\alpha_j \geq 0$, $j \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \mu\ \mathbb{P}X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu_{a_j}$ es una medida. Se dice que μ es concentrada en $\{a_j : j \in \mathbb{N}\}$

v) X infinito enumerable. Sea $\mathcal{A} = \{A \subseteq X.\ A \text{ finito ó } X / A \text{ finito}\}$ es un álgebra. Sea $\mu\ \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\mu(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } & A \text{ es finito} \\ 1 \text{ si } & A^c \text{ es finito} \end{cases}$

$\Longrightarrow \mu$ es contenido, μ no es premedida.

lema: sea μ es un contenido sobre un semi-anillo $\mathcal{A}$. Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subseteq B$, ent $\mu(A) \leq \mu(B)$.

dem: $\mu(B) = \mu(B \setminus A \,\dot\cup\, A) = \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} + \underbrace{\mu(A)}_{\geq 0} \geq \mu(A)$

Como $\mathcal{A}$ es un semianillo, no nec. $B \setminus A \in \mathcal{A}$, pero $\exists C_1, \dots, C_n \in \mathcal{A}$ tq $B \setminus A = \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} C_j$

$\Longrightarrow \mu(B) = \mu(B \setminus A \,\dot\cup\, A) = \mu(C_1 \,\dot\cup \cdots \dot\cup\, C_n \,\dot\cup\, A) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mu(C_j)}_{\geq 0} + \mu(A) \geq \mu(A)$

Este lema implica que los contenidos son isótonos

Recall: sea $\mathcal{H}$ un semianillo sobre X un conjunto, ent

$$R(\mathcal{H}) = \left\{ \dot\bigcup_{j=1}^{n} A_j : n \in \mathbb{N}, A_j \in \mathcal{H} \right\}$$

teorema: sea $\mathcal{H}$ un semianillo, $R = R(\mathcal{H})$ y μ un contenido tq $\mu: \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Si $A \in R$, $\exists M_1, \dots, M_n \in \mathcal{H}$ tq $A = \dot\bigcup_{j=1}^{n} M_j$. Defina

$$\bar\mu(A) := \sum_{j=1}^{n} \mu(M_j)$$

Entonces:

i. $\bar\mu$ es un contenido sobre R

ii. si μ es σ-aditiva, ent $\bar\mu$ es premedida

iii. $\bar\mu|_{\mathcal{H}} = \mu$

iv. $\bar\mu$ es únicamente determinada por i) y iii). Es decir si $\bar\mu, \mu'$ contenidos sobre R con $\bar\mu|_{\mathcal{H}} = \mu'|_{\mathcal{H}}$, ent $\bar\mu = \mu'$).

dem: Primero tenemos que ver que $\bar\mu$ está bien definida. Sea $A \in R$ y sean $M_1, \dots, M_m, N_1, \dots, N_n \in \mathcal{H}$ tq $A = \dot\bigcup_{j=1}^{m} M_j = \dot\bigcup_{j=1}^{n} N_j \in R$.

$\Rightarrow \forall j = 1, \dots, m$ y $M_j = M_j \cap \left(\dot\bigcup_{k=1}^{n} N_k \right) = \dot\bigcup_{k=1}^{n} (\underbrace{M_j \cap N_k}_{\in \mathcal{H}})$ (semianillos son estables bajo intersecciones)

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{m} \mu(M_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \mu(M_j \cap N_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(M_j \cap N_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(N_k)$$

lo anterior prueba iii)

i. a) $\bar\mu(\emptyset) = 0$

b) $\bar\mu$ **es positiva:** $\forall A \in R$, $\bar\mu(A) \geq 0$

c) **Aditividad:** sean $A_1, \dots, A_n \in R$ disjuntos sean $B_{jk} \in \mathcal{H}$ tq $\forall j$, $A_j = \dot\bigcup_{k=1}^{n_j} B_{jk}$. Ent

$$\bar\mu\left(\dot\bigcup_{j=1}^{n} A_j \right) = \bar\mu\left(\dot\bigcup_{j=1}^{n} \dot\bigcup_{k=1}^{n_j} B_{jk} \right) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n_j} \mu(B_{jk})}_{\bar\mu(A_j)} = \sum_{j=1}^{n} \bar\mu(A_j)$$

ii. Supongamos que μ es σ-aditiva. Sea $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq R$ disjuntos a pares tq $\dot\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in R$. Queremos probar que $\bar\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ si $A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$.

Sean $B_{jk}, C_k \in \mathcal{H}$ tq $\forall j$: $\dot\bigcup_{k=1}^{n_j} B_{jk} = A_j$ y $A = \dot\bigcup_{k=1}^{n} C_k$.

Ent $A_j = A_j \cap A = \dot\bigcup_{m=1}^{n} A_j \cap C_m = \dot\bigcup_{m=1}^{n} \dot\bigcup_{k=1}^{n_j} \underbrace{B_{jk} \cap C_m}_{\in \mathcal{H}}$

$$\Longrightarrow \bar\mu(A_j) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n_j} \mu(B_{jk} \cap C_m) = \sum_{m=1}^{n} \mu(A_j \cap C_m)$$

$$\dot\bigcup^{\infty} C_m \cap A_j = \dot\bigcup^{\infty} \dot\bigcup^{n_j} (C_m \cap B_{jk})$$

$$\bar{\mu}(C_m) = \underset{\uparrow}{\sum_{j=1}^{\infty}} \sum_{k=1}^{n_j} \mu(C_m \cap B_{jk}) = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\mu}(C_m \cap A_j)$$

μ es σ-aditiva

$$\Longrightarrow \bar{\mu}(A) = \sum_{m=1}^{n} \mu(C_m) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\mu}(C_m \cap A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \bar{\mu}(C_m \cap A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_j)$$

iv) sean $\bar{\mu}, \mu'$ contenidos sobre R tq $\mu'|_H = \mu$. sea $A \in R$ y $M_1, \dots, M_n \in H$ tq $A = \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} M_j$. Ent $\mu'(A) = \mu'(\dot{\bigcup}_{j=1}^{n} M_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu'(\underbrace{M_j}_{\in H}) = \sum_{j=1}^{n} \mu(M_j) = \bar{\mu}(\dot{\bigcup}_{j=1}^{n} M_j) = \bar{\mu}(A)$

$\Longrightarrow \mu' = \bar{\mu}$

Parciales medida: 13.9 ~~4~~ 25.10

clases extra medida: 30.8 y 4.10

errores taller: ④ iii) μ no es premedida

teorema (propiedades de un contenido sobre un anillo): sea X un conjunto y $R \subseteq \mathbb{P}X$ un anillo. sean $A, B \in R$, $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq R$, $\mu: R \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ un contenido entonces

i) $B \subseteq A$, $\mu(B) < \infty$, ent $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$

ii) $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$

iii) subaditividad:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$

iv) si los A_j son disjuntos entre sí y si $\dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} A_j \subseteq B$, ent

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu(B)$$

v) A_j son disjuntos y $\dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} A_j \in R$, ent

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu(\dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} A_j)$$

vi) si μ es una premedida, $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, ent

$$\mu(B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

dem: i) $\mu(A) = \mu(A \setminus B \,\dot{\cup}\, B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B)$

$\Longrightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$ ($\mu(B) < \infty$ y por eso puedo restar $\mu(B)$!)

ii) $\mu(A) + \mu(B) = \overbrace{\mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B)}_{\mu(B \setminus A \,\dot{\cup}\, A \cap B) = \mu(B)}}^{\mu(A \cup B \setminus A) = \mu(A \cup B)}$

$= \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$

iii. sea $A_0 = \emptyset$, $B_j = A_j \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{j-1} A_k \right) \in R, j \geq 1$. los B_j son disjuntos y

$$\dot{\bigcup_{j=1}^{n}} B_j = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

$$\Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \mu\left(\dot{\bigcup_{j=1}^{n}} B_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j)$$ y como $B_j \subseteq A_j$, ent

$$\sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$

$$\Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$

14 8 14

teorema: sea $R \subseteq \mathcal{P}X$ un anillo, $A, B \in R$, $(A_n)_n \subseteq R$, $\mu : R \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ un contenido. Entonces:

i. si $B \subseteq A$, $\mu(A) < \infty$, ent $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$

ii. $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$

iii. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

iv. si $(A_n)_n$ son por disjuntos y $\dot{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}} A_n \subseteq B$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu(B)$$

v. si $(A_n)_n$ son por disjuntos y $\dot{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}} A_n \in R$

$$\Longrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$$

vi. si μ es premedida y $B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

$$\Longrightarrow \mu(B) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

dem:

iv. sea $n \in \mathbb{N}$, ent

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} A_i\right) \leq \mu(B)$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leq \mu(B) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu(B)$$

v. como $\dot{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}} A_n \subseteq \dot{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}} A_n$, ent

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu\left(\dot{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}} A_n\right)$$

$A_0 = \emptyset$

vi. como $B \subseteq \bigcup A_n$ ent $B = B \cap \left(\bigcup A_n\right) = B \cap \left(\dot{\bigcup^{\infty}} A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j} A_{k-1}\right)$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

teorema: sea R un anillo sobre X y sea $\mu: R \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ un contenido. Entonces i) $\Leftrightarrow$ ii), iii) $\Leftrightarrow$ iv), i) $\Rightarrow$ iii), si μ es finita, iii) $\Rightarrow$ ii)

i. μ es premedida

ii. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(A_n)_n \subseteq R$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in R \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$

iii. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(A_n)_n \subseteq R$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$, $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_i \in R$ y $\mu(A_1) < \infty$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_i\right)$$

iv. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(A_n)_n \subseteq R$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$, $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, $\mu(A_1) < \infty$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$$

dem:

i) $\Rightarrow$ ii) sea $(A_n)_n$ creciente, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in R$, sea $A_0 = \emptyset$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\dot{\bigcup_{j=1}} A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{j} A_{k-1}\right)$$

$$= \mu\left(\dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}} A_j \setminus A_{j-1}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \setminus A_{i-1})$$

Si $\mu(A_j) = \infty$ para algún j se tiene trivialmente. Si $\mu(A_j) < \infty$, $\forall j$.

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) - \mu(A_{j-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) - \mu(A_{j-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) - \cancelto{0}{\mu(A_0)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

ii) $\Rightarrow$ i)

Veamos que μ es σ-aditiva. sean $(A_n)_n$ por disjuntos tq $\dot{\bigcup_{j=1}} A_j \in R$. Sea

$$B_n = \dot{\bigcup_{j=1}^{n}} A_j.$$

Nob que $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots$ tq $\bigcup B_n \in R$

$$\longrightarrow \mu\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

$$\longrightarrow \mu\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\dot{\bigcup_{j=1}^{n}} A_j\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

iii) $\Rightarrow$ iv) claro

iv) $\Rightarrow$ iii) Defina $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ y sea $B_n = A_n \setminus A$ y $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots$ y $\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \emptyset$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n \setminus A) = 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) - \mu(A) = 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

ii) $\Rightarrow$ iii) Basta probar que ii) $\Rightarrow$ iv). Defina $B_n = A_1 \setminus A_n$, ent $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots$

Ahora bien $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_1 \setminus A_n = A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_n$. Además,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(A_1)$$
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) \qquad \text{Como } \mu(A_1) < \infty, \text{ ent}$$
$$\lim_{n\to\infty} \cancel{\mu(A_1)} - \mu(A_n) = \cancel{\mu(A_1)} \qquad \Leftrightarrow \mu(A_1) < \infty$$
$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$$

iii) $\Rightarrow$ ii) si μ es finita: sea $(A_n)_n \subseteq R$ creciente tq $\bigcup A_n \in R$. sean

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$B_n = A \setminus A_n$$

$$\Longrightarrow B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots, \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_n = \emptyset \in R$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

contenidos y premedidas en $\mathbb{R}^n$:

sea $\mathcal{I} := \{ [a,b) : a \leq b,\ a,b \in \mathbb{R} \}$ un semianillo.

teorema: sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente, $\mu_f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ tq $[a,b) \longmapsto f(b) - f(a)$. Ent μ_f es un contenido finito. Además, si $f,g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente,

$$\mu_f = \mu_g \iff f - g \equiv \text{constante}$$

dem: sean $(A_j)_{j=1}^{n} \subseteq \mathcal{I}$ por disjuntos. Sup que $\dot{\bigcup}_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{I}$. Ent $\exists a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$A_i = [a_i, b_i)$$

como $\dot{\bigcup}_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{I}$, $\exists a, b \in \mathbb{R}$,

$$\dot{\bigcup}_{j=1}^{n} A_j = [a,b).$$

$$\rightarrow a = a_1 \leq b_1 = a_2 \leq b_2 \leq b_3 = a_3 \quad \cdots \quad b_{n-1} = a_n \leq b_n = b$$

$$\Rightarrow \mu\left(\dot{\bigcup}_{j=1}^{n} A_j\right) = \mu([a,b)) = f(b) - f(a)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{n} f(b_i) - f(a_i) = \sum_{j=1}^{n} f(a_{i+1}) - f(a_i)$$

$$= f(a_{n+1}) - f(a_1) = f(b) - f(a)$$

Entonces μ es un contenido. Ahora sup. que $\mu_f = \mu_g$. Sea $x \in \mathbb{R}$, si $x \geq 0$,

$$\mu_f([0,x)) - \mu_g([0,x)) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) - f(0) - g(x) - g(0) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = f(0) - g(0)$$

si $x < 0$, ent

$$\mu_f([x,0)) - \mu_g([x,0)) = 0$$

$$\Rightarrow f(0) - f(x) - g(0) + g(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(0) - g(0) = f(x) - g(x)$$

Suponga ahora que $f - g = c_0$, sean $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$

$$\Rightarrow \mu_f([x,y)) - \mu_g([x,y))$$

$$\Rightarrow f(y) - f(x) - g(y) + g(x) = c_0 - c_0 = 0$$

teorema: si $\mu : I \to \mathbb{R}$ es un contenido finito. Defina

$$f(x) = \begin{cases} \mu([0,x)) & x \geq 0 \\ -\mu([x,0)) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

f es creciente y $\mu_f = \mu$

dem: f es creciente, sean $x \leq y \in \mathbb{R}$, ent si $0 \leq x \leq y$

$$f(y) - f(x) = \mu([0,y)) - \mu([0,x)) = \mu([0,y) \setminus [0,x))$$
$$= \mu([x,y)) \geq 0$$

Ahora, si $x \leq 0$ y $y \geq 0$, ent

$$f(y) - f(x) = \mu([0,y)) + \mu([x,0)) \geq 0$$

Ahora, si $x \leq 0$, $y \leq 0$, ent:

$$f(y) - f(x) = -\mu([y,0)) + \mu([x,0)) = \mu([x,0) \setminus [y,0))$$
$$= \mu([x,y)) \geq 0$$

Vamos ahora que $\mu_f = \mu$. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$.

$$\mu_f([x,y)) = f(y) - f(x)$$

teorema: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente, μ_f def como anter. Ent μ_f es premedida ssi f es continua por la izq.

dem:

"$\Rightarrow$": Sea $a \in \mathbb{R}$, sea $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ tq $(a_n)_n$ es creciente y $a_n \to a$, considere

$$A_n = [a_n, a) \quad \text{es decreciente.}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

$$\mu_f(A_1) = \mu_f([a_1, a)) = f(a) - f(a_1) < \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \mu_f(A_n) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \mu_f([a_n, a)) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a) - f(a_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(a)$$

"$\Leftarrow$": Sean $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una familia en I pa disjunta y sup que $\dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} A_j \in I$

$$\Rightarrow A_i = [a_i, b_i)$$

Note que $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b) \subseteq \bigcup_{i=1} [a_i, b_i) \subseteq \bigcup_{j=1} (\alpha_i, b_i)$, ent $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n, b_1, \ldots, b_n$ tq

$$[\alpha,\beta] \subseteq \underbrace{\bigcup_{j=1}^{N} [\alpha_i, \beta_i)}_{\text{puedo añadir ese punto}} \quad (\text{compacidad})$$

calculemos $\mu_f([a,b)) = \mu_f([a,\beta) \cup [\beta, b)) = \mu_f([\alpha,\beta)) + \mu_f([\beta, b))$

$$\leq \mu_f\left(\bigcup_{j=1}^{N} [\alpha_i, b_i)\right) + \underbrace{f(b) - f(\beta)}_{<\varepsilon}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N} \mu_f[\alpha_i, b_i) + f(b) - f(\beta)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} f(b_i) - f(\alpha_i) + f(b) - f(\beta)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N} f(b_i) - f(a_i) + f(a_i) - f(\alpha_i) + \varepsilon$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N} \left(\mu_f([a_j, b_j)) + \varepsilon/2^i\right) + \varepsilon$$

$$< \left(\sum_{j=1}^{N} \mu_f[a_j, b_j)\right) + 2\varepsilon$$

$$\mu_f([a,b)) \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu_f([a_i, b_i))\right) + 2\varepsilon$$

26 8 · 2014

Taller 1, 3·b: sea Σ un σ-anillo con infinitos elementos, ent $\exists (A_n)_n \subseteq \Sigma$ disjuntos dos a dos

dem: sea $S \in \Sigma$ un átomo si $S \neq \emptyset$ y $\nexists T \in R$ tq $\emptyset \neq T \subsetneq S$. claramente si S y T son atomos entonces $S \cap T = \emptyset$ o $S = T$

caso 1: $\exists$ sucesión $(y_n)_n \subseteq \Sigma$ tq $y_1 \supsetneq y_2 \supsetneq y_3 \supsetneq$

sea $A_j = y_j \setminus y_{j+1} \in \Sigma \neq \emptyset$ y $A_j \cap A_k = \emptyset$ si $j = k$

caso 2: $\nexists$ sucesión $(y_n)_n \subseteq \Sigma$ con $y_1 \supsetneq y_2 \supsetneq \cdots$

$\Rightarrow$ $\forall M \in \Sigma$, $\exists S \in \Sigma$ átomo con $S \subseteq M$. si hay infinitos átomos, entonces se puede escoger una sucesión $(A_j)_j$ de atomos distintos y si hay finitos atomos, Σ es finito.

Premedidas finitas sobre $\mathcal{J}^n$:

teorema: sea $n \in \mathbb{N}$:

a· $\mu: \mathcal{J}^n \to \mathbb{R}$ premedida finita en $\mathcal{J}^n$

$\Rightarrow f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \prod_{j=1}^{n} \operatorname{sgn}(x_j)\, \mu([x^-, x))$ es "creciente" y "cont." por la izq. es decir, creciente y cont. por izq en cada una de sus coordenadas

obs: $x^- = (\min\{x_1,0\}, \min\{x_2,0\}, \dots, \min\{x_n,0\})$
$x^+ = (\max\{x_1,0\}, \dots, \max\{x_n,0\})$

b. $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es "creciente" y "continua por la izquierda"

$\longrightarrow \mu_f : \mathcal{J}^n \to \mathbb{R}, \quad \mu_f([a,b)) = f(b) - f(a)$ es premedida

teorema :
caso especial:

$\lambda^n : \mathcal{J}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lambda^n([a,b)) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$

es una premedida sobre $\mathbb{R}^n$ y se denomina **Premedida de Lebesgue.**

Bauer, I §4, Elstrodt, II §3

Extensión de medidas:

Hasta ahora tenemos.

α. si tengo un contenido μ sobre $\mathcal{J}^1$, entonces tengo una extensión única $\bar{\mu}$ al anillo generado por $\mathcal{J}$

Además si μ viene de una función monótona continua por izquierda, μ es premedida

Finalmente, si $\bar{\mu}$ es premedida si μ es σ-aditiva

Frage: ¿Existe una extensión (única) a la σ-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$?

Idee: sean $\mathcal{R}$ un anillo sobre X y μ una premedida sobre $\mathcal{R}$. Queremos construir una extensión de μ a $\mu^*: \mathcal{P}X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (μ^* no es medida en general).

Entonces, $\exists$ σ-álgebra $\mathcal{A}$ tq $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}$ y $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ es medida.

Finalmente, tendremos que $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$ es una medida. Sin embargo, esto no garantiza la unicidad de mi premedida

obs: μ^* se llama **medida exterior.**

def: sea X un conjunto y $\mu^* : \mathcal{P}X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. μ^* es una medida exterior si $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ si $A \subseteq B$ y μ^* es σ-subaditiva. Es decir

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$$

ejemplos :

a. cada medida sobre $\mathcal{P}X$ es una medida exterior

b. $M \subseteq X$ se dice medible (μ^* medible) si $\forall A \subseteq X$, obs: $\forall A, M \subseteq X$, $\mu^*(A) \leq \mu^*(A\cap M) + \mu^*(A \setminus M)$ (por σ-subaditividad)

teorema (Carathéodory): sea X un conjunto y $\mu^* : \mathbb{P}X \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida exterior. Si $\mathfrak{M} := \{$ conjuntos μ^* medibles $\}$.

i) $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra sobre X

ii) $\overline{\mu} = \mu^*|_{\mathfrak{M}}$ es una medida

iii) $M \subseteq X$ tq $\mu^*(M) = 0 \implies M \in \mathfrak{M}$

dem:

i)

α) $\emptyset$ y complementos:

$\emptyset \in \mathfrak{M}$ es claro. Ahora, sea $M \in \mathfrak{M}$. $\forall A \subseteq X$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \setminus M)$$
$$= \mu^*(A \setminus (X \setminus M)) + \mu^*(A \setminus (X \setminus M))$$

Entonces $X \setminus M \in \mathfrak{M}$

β) si $M, N \in \mathfrak{M} \implies M \cup N \in \mathfrak{M}$:

$\forall A \subseteq X$: $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \setminus M)$
$$= \mu^*(A \cap M) + \mu^*((A \setminus M) \cap N) + \mu^*((A \setminus M) \setminus N)$$

Veamos qué es $(A \cap M) \cup ((A \setminus M) \cap N)$. Esto es:

$$(A \cap M) \cup ((A \setminus M) \cap N)$$
$$= (A \cap M) \cup ((A \cap N) \setminus M)$$
$$= (A \cap M) \cup (A \cap N)$$

$\implies$ $\mu^*(A) \geq \mu^*((A \cap M) \cup (A \cap N)) + \mu^*((A \setminus M) \setminus N)$
$$= \mu^*(A \cap (M \cup N)) + \mu^*(A \setminus (M \cup N))$$
$$= \mu^*(A \cap (M \cup N)) + \mu^*(A \setminus (M \cup N))$$

$\overset{\text{obs.}}{\implies}$ $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (M \cup N)) + \mu^*(A \setminus (M \cup N))$

Entonces $M \cup N$ es medible. Es decir, α + β implican que $\mathfrak{M}$ es un álgebra.

γ) $\mathfrak{M}$ es σ-álgebra:

sea $(M_j)_j \subseteq \mathfrak{M}$. Queremos probar que $\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j = N \in \mathfrak{M}$. Sin restricción suponga que todos los M_j son disjuntos (sino, disjuntizamos)

$\forall n \in \mathbb{N}$, $N_n := \bigcup_{j=1}^{n} M_j \in \mathfrak{M}$. Ahora, $\forall A \subseteq X$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap N_n) + \mu^*(A \setminus N_n)$$

($N \subseteq N_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

$$= \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A \cap M_j) + \mu^*(A \setminus N)$$

lo anterior, pues si $\mu^*(A \cap (M_1 \dot\cup M_2)) = \mu^*(A \cap (M_1 \dot\cup M_2) \cap M_1) + \mu^*([A \cap (M_1 \cup M_2)] \setminus M_1)$
$= \mu^*(A \cap M_1) + \mu^*(A \cap M_2)$

por inducción, lo tengo para n y como por hip los M_j son disjuntos, se tiene lo que necesitamos.

$\forall n \in \mathbb{N}$, ent tome el límite $\longrightarrow$

$$\mu^*(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap M_j) + \mu^*(A \setminus N)$$

$$\geq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap M_j\right) + \mu^*(A \setminus N) \quad \text{pues } \mu^* \text{ es } \sigma \text{ subaditiva}$$

$$= \mu^*(A \cap N) + \mu^*(A \setminus N)$$

con lo dos

$\Longrightarrow N \in \mathfrak{M}$, pues $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap N) + \mu^*(A \setminus N)$.

ii) $\bar{\mu} = \mu^*|_{\mathfrak{M}}$: Basta probar si $(M_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}$ disjuntos dos a dos,

entonces $\mu^*\left(\dot{\bigcup}_{j=1} M_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(M_j)$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(M_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap M_j) + \mu^*(M_j \setminus A)$$

sea $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \in \mathfrak{M}$

$$\leq \mu^*(A) \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(M_j)}_{\uparrow\ \sigma\text{-subaditividad}}$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(M_j) = \mu^*\left(\dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} M_j\right)$$

28 · 8 · 2014

iii) $M \subseteq X$, $\mu^*(M) = 0 \longrightarrow M \in \mathfrak{M}$: sea $M \subseteq X$ tq $\mu^*(M) = 0$. sea $A \subseteq X$.

$$\Longrightarrow \mu^*(A) + \underbrace{\overbrace{\mu^*(A \cap M)}^{\subseteq M}}_{\leq \mu^*(M) = 0} = \mu^*(A)$$

$$\mu^*(A \setminus M) + \mu^*(A \cap M) \leq \mu^*(A) \qquad (A \setminus M \subseteq A)$$