Universidad de los Andes
MATE-4220

Medida e Integración

Taller 12

Medidas complejas; teorema de Radon-Nikodym.   Fecha de entrega: 13 de noviembre 2014

---

1. Sean μ, ν medidas complejas sobre una σ-álgebra $\mathfrak{A}$. Muestre que $\nu \ll \mu$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|\nu(A)| < \varepsilon$ si $A \in \mathfrak{A}$ con $|\mu|(A) < \delta$.

2. Sea $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ una medida compleja.
   (a) Muestre que existe una función $g : X \to \mathbb{C}$ tal que $|g| = 1$ y $\mu = g \odot |\mu|$.
   (b) Para $f \in \mathscr{L}_1(X, \mu)$ muestre que $f \in \mathscr{L}_1(X, |\mu|)$ y que
   $$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}|\mu|,$$
   donde
   $$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \int_X f \, \mathrm{d}\operatorname{Re}(\mu)^+ - \int_X f \, \mathrm{d}\operatorname{Re}(\mu)^- + \mathrm{i} \int_X f \, \mathrm{d}\operatorname{Im}(\mu)^+ + \mathrm{i} \int_X f \, \mathrm{d}\operatorname{Im}(\mu)^-.$$

3. Sea $\mathfrak{B}$ la σ-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$ y β la medida de Borel-Lebesgue sobre $\mathfrak{B}$. Sea μ una medida de Borel sobre $\mathbb{R}$ tal que la función de distribución
   $$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} -\mu((x, 0]), & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \mu((0, x]), & x > 0 \end{cases}$$
   es derivable y φ' es continua. Muestre que $\varphi'(x) = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\beta}(x) =$ la derivada de Radon-Nikodym.

4. Sean μ, ν, ω medidas σ-finitas sobre la σ-álgebra $\mathfrak{A}$ con $\mu \ll \nu \ll \omega$. Muestre que $\mu \ll \omega$ y que
   $$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\omega} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}.$$