Universidad de los Andes
MATE-4220

Medida e Integración

Taller 9

Principio de Cavalieri; función de Γ. Fecha de entrega: 16 de octubre 2014, antes de las 12 m

---

1. Muestre que el plano $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ tiene medida de Lebesgue 0.

2. (a) *Principio de Cavalieri.* Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y $K_{x_n} := \{(x_j)_{j=1}^{n-1} : (x_j)_{j=1}^{n} \in K\}$ para todo $x_n \in \mathbb{R}$. Muestre que

$$\beta^n(K) = \int_{\mathbb{R}} \beta^{n-1}(K_x)\,\mathrm{d}\lambda(x),$$

donde β^k es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^k$.

   (b) Sea $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ compacto y $h > 0$. El *cono con base B y altura h* es definido por

$$C(B,h) := \{\big((1-\lambda)x, \lambda h\big) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : x \in B,\ 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Calcule el volumen $\beta^n(C(B,h))$ del cono $C(B,h)$.

3. Sea B el interior del elipse $4x^2 + y^2 = 4$. Calcule $\displaystyle\int_B y^2\,\mathrm{d}\lambda(x,y)$.

4. Muestre para la función de Γ, definida por

$$\Gamma : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \Gamma(x) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

   (a) Para $x > 0$ fijo, la función $f_x : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f_x(t) := \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$ es Lebesgue-integrable.

   (b) Γ es de clase C^∞ y para $x \in (0,\infty)$ y $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} (\ln(t))^k t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

   (c) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x > 0)$.

   (d) $\Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N})$.