Universidad de los Andes
MATE-4220

Medida e Integración

Taller 8

Lema de Riemann-Lebesgue;
teoremas de convergencia.

Fecha de entrega: 16 de octubre 2014

---

1. Muestre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{x}{n})^n}\,\mathrm{d}x = 1.$

2. Para $a > 0$ y $t > 0$ muestre para las integrales impropias según Riemann:

$$\int_0^\infty \frac{t}{t^2+x^2}\,\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-at}, \qquad \int_0^\infty \frac{x}{t^2+x^2}\,\sin(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-at}.$$

¿Existen las integrales como integrales de Lebesgue?

Hint. Para la primera integral, muestre que la función

$$f_a(t) := \int_0^\infty \frac{t}{t^2+x^2}\,\cos(ax)\,\mathrm{d}x$$

satisface la ecuación diferencial $f_a'' = a^2 f_a$ derivando baja la integral y utlizando intergación por partes.

3. Determine si las siguientes integrales existen y determine sus valores si posible:

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y, \qquad \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x, \qquad \int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^2$$

para las funciones

(a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}, \quad x, y > 0,$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} 2^{2n} & \text{si } 2^{-n} < x \le 2^{-n+1},\ 2^{-n} < y \le 2^{-n+1}, \\ -2^{2n+1} & \text{si } 2^{-n-1} < x \le 2^{-n},\ 2^{-n} < y \le 2^{-n+1}, \\ 0 & \text{en otros casos,} \end{cases}$

donde λ^2 es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$ y las integrales iteradas son integrales en el sentido de Lebesgue.

4. *Lema de Riemann-Lebesgue.* Sea $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$ y $\widetilde{f}$ su transformada de Fourier. Muestre que $\lim_{t\to\infty}\widetilde{f}(t) = 0$.

Hint. Muestre la afirmación primero para funciónes simples.

Puede usar sin prueba el siguiente teorema que fue enunciado en clase:

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente Riemann-integrable (es decir, su restricción a cualquier compacto es Riemann-integrable). Muestre que f es Lebesgue-integrable si y sólo si la integral impropia según Riemann

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x := \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

existe. En este caso, $R\text{-}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda$, donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

(Si prueba este teorema, será calificado pero no afectará la nota del taller.)