

Medida e Integración

Taller 7

Convergencia.

Fecha de entrega: 9 de octubre de 2014

Sea (X, \mathfrak{A}, μ) un espacio de medida y $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{K}$ funciones medibles. Se dice que f_n converge en medida a f si para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Se dice que f_n converge μ -casi siempre uniformemente a f si existe un conjunto $A \in \mathfrak{A}$ tal que $\mu(X \setminus A) = 0$ y $f_n \rightarrow f$ uniformemente en A .

Se dice que f_n converge casi uniformemente si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $A \in \mathfrak{A}$ tal que $\mu(X \setminus A) < \varepsilon$ y $(f_n|_A)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente.

En los problemas 1-3 suponemos que todos los funciones f y f_n son medibles.

- Suponga que $f_n \rightarrow f$ en medida. Muestre que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge μ -casi siempre a f .
 - Muestre que el teorema de Lebesgue sigue siendo válido si suponemos $f_n \rightarrow f$ en medida en vez de $f_n \rightarrow f$ μ -casi siempre.
- Suponga que $\mu(X) < \infty$. Muestre que $f_n \rightarrow f$ en medida si y sólo si cada subsucesión de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión que converge μ -casi siempre a f . Muestre que en general no es equivalente si $\mu(X) = \infty$.
- Si f_n converge casi uniformemente, entonces existe una función medible f , tal que $f_n \rightarrow f$ μ -casi siempre.
- De las siguientes sucesiones de funciones determine si convergen puntualmente, si convergen μ -casi siempre, si convergen en medida, si convergen casi uniforme, si convergen en \mathcal{L}_p . Si convergen, halle la función límite.

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n = \chi_{[n, \infty)},$$

$$g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_n = \chi_{[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]}, \quad \text{con } n = 2^k + j \quad (j = 0, \dots, 2^k - 1),$$

$$h_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ 2n - n^2 x, & 1/n < x \leq 2/n, \\ 0, & 2/n < x \leq 1. \end{cases}$$