Universidad de los Andes
MATE-4220

Medida e Integración

Taller 6

Teoremas de Fatou, Levi y Lebesgue. Fecha de entrega: 2 de octubre de 2014

---

1. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}_1(X)$ y $f \in \mathscr{L}_1(X)$ tal que $f_n \to f$ μ-c.s. y $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X |f_n| \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$. Muestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$.

2. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f \in \mathscr{L}_1(X)$ con $f \geq 0$. Muestre que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $A \in \mathfrak{A}$ con $\mu(A) < \delta$
$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$
Hint. Teorema de Levi aplicado a $f_n(x) := \min\{n, f(x)\}, (x \in X)$.

3. Una función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ se llama *absolutamente continua*, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y toda partición $a \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \cdots \leq \alpha_n < \beta_n \leq b$ con $\sum\limits_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) < \delta$
$$\sum_{j=1}^{n} |g(\beta_j) - g(\alpha_j)| < \varepsilon.$$
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrable. Muestre que la siguiente función es absolutamente continua:
$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := \int\limits_a^x f(t) \,\mathrm{d}t := \int\limits_{[a,x]} f \,\mathrm{d}\mu.$$

4. (a) Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Demuestre que f es Lebesgue integrable y calcule su integral.
   (b) Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida, $\alpha \in (0, \infty)$ y $f : X \to [0, \infty]$ una función medible con $\int_X f \,\mathrm{d}\mu =: c \in (0, \infty)$. Muestre
   $$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\left(1 + (f/n)^\alpha\right) \mathrm{d}\mu \;=\; \begin{cases} \infty, & 0 < \alpha < 1, \\ c, & \alpha = 1, \\ 0, & \alpha > 1. \end{cases}$$
   Hint. Si $\alpha \geq 1$, entonces el integrando es $\leq \alpha f$; aplique el lema de Fatou, si $\alpha \in (0, 1)$.