Universidad de los Andes
MATE-4220

Medida e Integración

Taller 5

Funciones simples; integración. Fecha de entrega: 18 de septiembre 2014

---

1. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Para $B \in \mathfrak{A}$, $B \neq \emptyset$ definimos $\mathfrak{A}_B := \{A \cap B : A \in \mathfrak{A}\}$ y $\mu_B := \mu|_{\mathfrak{A}_B}$. Sabemos que $(B, \mathfrak{A}_B, \mu_B)$ es un espacio de medida.

   (a) Muestre que $f|_B$ es $\mathfrak{A}_B$-medible si y solo si $\chi_B \cdot f$ es $\mathfrak{A}$-medible.

   Suponemos para el resto del ejercicio que $\chi_B \cdot f$ es medible.

   (b) Si $f \geq 0$, muestre que $\displaystyle\int_B f|_B \,\mathrm{d}\mu_B = \int_X \chi_B \cdot f \,\mathrm{d}\mu.$ $\qquad (*)$

   (c) Muestre: $\chi_B \cdot f \in \mathscr{L}_1(X, \mathfrak{A}, \mu) \iff f|_B \in \mathscr{L}_1(B, \mathfrak{A}_B, \mu_B)$. En este caso, $(*)$ vale.

   (d) Sea $f : X \to [0, \infty]$ $\mathfrak{A}$-medible. Muestre: Si $\displaystyle\int_X f \,\mathrm{d}\mu < \infty$, entonces $f(x) < \infty$ μ-casi siempre.

2. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida y $g : X \to \mathbb{R}$ una función medible con $g \geq 0$ y define

$$\nu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad \nu(E) := \int_X g\, \chi_E \,\mathrm{d}\mu.$$

   (a) ν es una medida sobre $\mathfrak{A}$.

   (b) Si $f : X \to \mathbb{R}$ es medible con $f \geq 0$, entonces $\displaystyle\int_X f \,\mathrm{d}\nu = \int_X fg \,\mathrm{d}\mu.$

3. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida y $(E_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ tal que $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) < \infty$. Muestre que casi todos los $x \in X$ pertenecen a a lo sumo a finitos conjuntos E_j.

   Hint. Funciones características y teorema de convergencia monótona.

4. En $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue λ consideramos las funciones

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = (n - n^2|x|)\chi_{([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \setminus \{0\})}(x).$$

   (a) ¿Cuáles hipótesis del lema de Fatou, del teorema de Levi (convergencia monótona) y de Lebesgue son satisfechas, cuales no? Halle $\int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda$ y $\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda$ donde f es la función límite (¡puntual!) de las f_n.

   (b) ¿Qué cambia si en vez de las f_n consideramos la sucesión

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g_n(x) = (n - n^2|x|)\chi_{([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}])}(x) \text{ ?}$$