Universidad de los Andes
MATE-4220

Medida e Integración

Taller 4

Un conjunto no Lebesgue-medible;
funciones medibles.

Fecha de entrega: 11 de septiembre 2014

---

1. (a) No existe ninguna medida μ sobre el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathbb{P}\mathbb{R})$ tal que μ es invariante bajo translación y $0 < \mu([0,1)) < \infty$.

   (b) Existe un conjunto $M \subseteq \mathbb{R}$ que no es Lebesgue-medible.

   Hint para (a):

   - Define una relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}$ por $x \sim y :\iff x - y \in \mathbb{Q}$.
   - De cada clase escoja un representante en $[0,1)$. Sea M la unión de ellos.
   - Si μ es una medida como en (a), qué es $\mu(A) =$?

2. Sea λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y $\mathfrak{M}$ la σ-álgebra de los subconjuntos λ-medibles de $\mathbb{R}$. Muestre: Si $M \in \mathfrak{M}$ y $\mu(M) > 0$, existe un $N \in \mathfrak{M}$ tal que $N \subseteq M$ y

$$\mu(N) > 0 \qquad \text{y} \qquad \mu(M \setminus N) > 0.$$

   (Se dice que *la medida de Lebesgue no tiene átomos*.)

3. Sea $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ como en el problema 1 del taller 3. Determine todas las funciones medibles $f : X \to [0, \infty]$ y su integral $\displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\mu$.

4. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida, $(X, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ su completación y $\varphi : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathfrak{A}_0$-simple. Muestre que existen funciones ψ_1, ψ_2, $\mathfrak{A}$-simples, tales que $\psi_1 \leq \varphi \leq \psi_2$ y $\mu(\{\psi_1 \neq \psi_2\}) = 0$. Muestre que para tales funciones $\int_X \psi_1 \, \mathrm{d}\mu = \int_X \psi_2 \, \mathrm{d}\mu$.