Universidad de los Andes
MATE-4220

Medida e Integración

Taller 13

Espacios $\mathscr{L}_p$.

Fecha de entrega: 18 de noviembre 2011

---

1. Sean $f,\ g : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Muestre:
   (a) Si $f = g$ en λ^s-casi todas partes, entonces $f = g$.
   (b) $\operatorname{esssup} f = \sup |f|$.

2. Sean $0 < p_1 < p_2 < \infty$.
   (a) Si $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ es un espacio de medida con $\mu(X) < \infty$, entonces $\mathscr{L}_{p_2}(\mu) \subset \mathscr{L}_{p_1}(\mu)$.
   (b) Si X es contabla (finito o infinito) y μ la medida de conteo sobre X, entonces $\mathscr{L}_{p_1}(\mu) \subset \mathscr{L}_{p_2}(\mu)$.
   Si X es infinito contable, se cumple la inclusión estricta $\mathscr{L}_{p_1}(\mu) \subsetneq \mathscr{L}_{p_2}(\mu)$.

Sea $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^s)$ con $0 \le \varphi \le 1$ y

(a) $\varphi(x) = 0$ para $|x| \ge 1$, (b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^s} \varphi \,\mathrm{d}x = 1.$

Para $\varepsilon > 0$ defina $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}, \quad \varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-s}\varphi(x/\varepsilon)$.
Entonces $\varphi_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^s)$, $0 \le \varphi \le \varepsilon^{-s}$ y

(a) $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ para $|x| \ge \varepsilon$, (b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^s} \varphi_\varepsilon(x) \,\mathrm{d}x = 1.$

una familia de *mollifiers*,

---

3. Sean $1 \le p < \infty$, $f \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^s)$ y φ y $\{\varphi_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ como arriba. Muestre:
   (a) $\varphi(\,\cdot - y) \cdot f(\cdot) \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^s)$, $y \in \mathbb{R}^s$.
   (b) $\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$.
   (c) $\operatorname{supp}(\varphi * f) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(\varphi)$.
   (d) Si $f \in C_c(\mathbb{R}^s)$, entonces $\varphi_\varepsilon * f$ converge uniformemente a f si $\varepsilon \to 0$, es decir,
   $$\sup_{x\in\mathbb{R}^s} \{|\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)|\} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

4. (a) $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^s)$, entonces $\varphi_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$.
   (b) $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^s)$ con soporte compacto, entonces $\varphi_\varepsilon * f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^s)$.
   (c) $f \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^s)$ con $1 \le p < \infty$, entonces $\varphi_\varepsilon * f \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^s)$ y
   $$\|\varphi_\varepsilon * f\|_p \le \|f\|_p, \qquad \lim_{\varepsilon\searrow} \|\varphi_\varepsilon * f - f\|_p \to 0.$$