

# Medida e Integración

Taller 12

Fecha de entrega: 11 de noviembre 2011

---

1. Sean  $\mu, \nu$  medidas complejas sobre una  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{A}$ . Muestre que  $\nu \ll \mu$  si y sólo si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $|\nu(A)| < \varepsilon$  si  $A \in \mathfrak{A}$  con  $|\mu|(A) < \delta$ .
2. Sea  $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$  una medida compleja.
  - (a) Muestre que existe una función  $g : X \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $|g| = 1$  y  $\mu = g \odot |\mu|$ .
  - (b) Para  $f \in \mathcal{L}_1(X, \mu)$  muestre que  $f \in \mathcal{L}_1(X, |\mu|)$  y que

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d|\mu|,$$

donde

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f \, d\operatorname{Re}(\mu)^+ - \int_X f \, d\operatorname{Re}(\mu)^- + i \int_X f \, d\operatorname{Im}(\mu)^+ + i \int_X f \, d\operatorname{Im}(\mu)^-.$$

3. Sea  $\mathfrak{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $\mathbb{R}$  y  $\beta$  la medida de Borel-Lebesgue sobre  $\mathfrak{B}$ . Sea  $\mu$  una medida de Borel sobre  $\mathbb{R}$  tal que la función de distribución

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} -\mu((x, 0]), & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \mu((0, x]), & x > 0 \end{cases}$$

es derivable y  $\varphi'$  es continua. Muestre que  $\varphi'(x) = \frac{d\mu}{d\beta}(x)$  es la derivada de Radon-Nikodym.

4. Sean  $\mu, \nu, \omega$  medidas sobre la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{A}$  con  $\mu \ll \nu \ll \omega$ . Muestre que  $\mu \ll \omega$  y que

$$\frac{d\omega}{d\mu} = \frac{d\omega}{d\nu} \frac{d\nu}{d\mu}.$$