Universidad de los Andes
MATE-4220

Medida e Integración

Taller 9

Principio de Cavalieri; función de Γ.

Fecha de entrega: 14 de octubre 2011

---

1. (a) *Principio de Cavalieri.* Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y $K_{x_n} := \{(x_j)_{j=1}^{n-1} : (x_j)_{j=1}^{n} \in K\}$ para todo $x_n \in \mathbb{R}$. Muestre que

$$\beta^n(K) = \int_{\mathbb{R}} \beta^{n-1}(K_x)\,\mathrm{d}\lambda(x),$$

donde β^k es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^k$.

(b) Sea $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ compacto y $h > 0$. El *cono con base B y altura h* es definido por

$$C(B,h) := \{\big((1-\lambda)x, \lambda h\big) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : x \in B,\ 0 \le \lambda \le 1\}.$$

Calcule el volumen $\beta^n(C(B,h))$ del cono $C(B,h)$.

2. Sea B el interior del elipse $4x^2 + y^2 = 4$. Calcule $\displaystyle\int_B y^2\,\mathrm{d}\lambda(x,y)$.

3. Muestre para la función de Γ, definida por

$$\Gamma :\ (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \Gamma(x) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

(a) Para $x > 0$ fijo, la función $f_x : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_x(t) := \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ es Lebesgue-integrable.

(b) Γ es de clase C^∞ y para $x \in (0,\infty)$ y $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}(\ln(t))^k t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

(c) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x > 0)$.

(d) $\Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N})$.

4. Sean $X = Y = [0,1]$ y $\mu = \nu$ la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Sean $t_0 := 0$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente con $t_n \to 1$, $n \to \infty$, y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles con $\operatorname{supp} g_n \subset (t_{n-1}, t_n)$ y $\int_{[0,1]} g_n\,\mathrm{d}\mu = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Muestre que

$$f : X \times Y \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \sum_{n=1}^\infty (g_n(x) - g_{n+1}(x))g_n(y)$$

es bien-definida y que

$$\int_X \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\mu \ne \int_Y \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\nu.$$