Universidad de los Andes
MATE-4220

Medida e Integración

Taller 8

Medida de producto; teorema de Fubini.

Fecha de entrega: 7 de octubre 2011

---

1. Calcule
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

2. Muestre que la cruz de los ejes en $\mathbb{R}^2$ tiene medida de Lebesgue 0.

3. Sean $(X,\mathfrak{A},\mu)$ y $(Y,\mathfrak{A},\nu)$ espacios de medida (no necesariamente σ-finitos) y sea ϱ una medida sobre $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}$ tal que $\varrho(A\times B)=\mu(A)\nu(B)$ si $A\in\mathfrak{A}$ y $B\in\mathfrak{A}$. Muestre que para $f\in\mathscr{L}_1(X)$ y $g\in\mathscr{L}_1(Y)$ la función
$$h: X\times Y\to\mathbb{R},\qquad h(x,y)=f(x)g(y)$$
pertenece a $\mathscr{L}_1(X\times Y)$ y que
$$\int_{X\times Y} h\,\mathrm{d}\varrho = \left(\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right)\cdot\left(\int_Y g\,\mathrm{d}\nu\right).$$

4. Determine si las siguientes integrales existen y determine sus valores si posible:
$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,\qquad \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,\qquad \int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^2$$
para las funciones

   (a) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{(x+y)^3},\quad x,y>0,$

   (b) $f(x,y)=\begin{cases} 2^{2n} & \text{si } 2^{-n}<x\le 2^{-n+1},\ 2^{-n}<y\le 2^{-n+1},\\ -2^{2n+1} & \text{si } 2^{-n-1}<x\le 2^{-n},\ 2^{-n}<y\le 2^{-n+1},\\ 0 & \text{en otros casos,}\end{cases}$

   donde λ^2 es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$ y las integrales iteradas son integrales en el sentido de Lebesgue.