

Medida e Integración

Taller 7

Lema de Riemann-Lebesgue;
teoremas de convergencia.

Fecha de entrega: 23 de septiembre 2011

1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Riemann-integrable (es decir, su restricción a cualquier compacto es Riemann-integrable). Muestre que f es Lebesgue-integrable si y sólo si la integral impropia según Riemann

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x)| dx$$

existe. En este caso, $R\text{-}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$, donde λ es la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

2. Muestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{n}}}{(1 + \frac{x}{n})^n} dx = 1.$$

3. *Lema de Riemann-Lebesgue.* Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ y \tilde{f} su transformada de Fourier. Muestre que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{f}(t) = 0$.

Hint. Muestre la afirmación primero para funciones simples.

4. Para $a > 0$ y $t > 0$ muestre para las integrales impropias según Riemann:

$$\int_0^{\infty} \frac{t}{t^2 + x^2} \cos(ax) dx = \frac{\pi}{2} e^{-at},$$
$$\int_0^{\infty} \frac{x}{t^2 + x^2} \sin(ax) dx = \frac{\pi}{2} e^{-at}.$$

¿Existen las integrales como integrales de Lebesgue?

Hint. Para la primera integral, muestre que la función

$$f_a(t) := \int_0^{\infty} \frac{t}{t^2 + x^2} \cos(ax) dx$$

satisface la ecuación diferencial $f_a'' = a^2 f_a$ derivando bajo la integral y utilizando integración por partes.