Universidad de los Andes
MATE-4220

Medida e Integración

Taller 4

Funciones simples; integración. Fecha de entrega: 2 de septiembre 2011

---

1. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida, $(X, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ su completación y $\varphi : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathfrak{A}_0$-simple. Muestre que existen funciones ψ_1, ψ_2, $\mathfrak{A}$-simples, tales que $\psi_1 \le \varphi \le \psi_2$ y $\mu(\{\psi_1 \ne \psi_2\}) = 0$. Muestre que para tales funciones $\int_X \psi_1 \,\mathrm{d}\mu = \int_X \psi_2 \,\mathrm{d}\mu$.

2. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Para $B \in \mathfrak{A}$, $B \ne \emptyset$ definimos $\mathfrak{A}_B := \{A \cap B : A \in \mathfrak{A}\}$ y $\mu_B := \mu|_{\mathfrak{A}_B}$. Sabemos que $(B, \mathfrak{A}_B, \mu_B)$ es un espacio de medida.

   (a) Muestre que $f|_B$ es $\mathfrak{A}_B$-medible si y solo si $\chi_B \cdot f$ es $\mathfrak{A}$-medible.

   Suponemos para el resto del ejercicio que $\chi_B \cdot f$ es medible.

   (b) Si $f \ge 0$, muestre que $\displaystyle\int_B f|_B \,\mathrm{d}\mu_B = \int_X \chi_B \cdot f \,\mathrm{d}\mu.$ $(*)$

   (c) Muestre: $\chi_B \cdot f \in \mathscr{L}_1(X, \mathfrak{A}, \mu) \iff f|_B \in \mathscr{L}_1(B, \mathfrak{A}_B, \mu_B)$. En este caso, $(*)$ vale.

   (d) Sea $f : X \to [0, \infty]$ $\mathfrak{A}$-medible. Muestre: Si $\displaystyle\int_X f \,\mathrm{d}\mu < \infty$, entonces $f(x) < \infty$ μ-casi siempre.

3. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida y $g : X \to \mathbb{R}$ una función medible con $g \ge 0$ y define

$$\nu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad \nu(E) := \int_X g\, \chi_E \,\mathrm{d}\mu.$$

   (a) ν es una medida sobre $\mathfrak{A}$.

   (b) Si $f : X \to \mathbb{R}$ es medible con $f \ge 0$, entonces

$$\int_X f \,\mathrm{d}\nu = \int_X f g \,\mathrm{d}\mu.$$

4. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida y $(E_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) < \infty.$$

   Muestre que casi todos los $x \in X$ pertenecen a lo sumo a finitos conjuntos E_j.

   Hint. Funciones características y teorema de convergencia monótona.