

Medida e Integración

Taller 3

Un conjunto no Lebesgue-medible;
funciones medibles.

Fecha de entrega: 26 de agosto 2011

- (a) No existe ninguna medida μ sobre el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{P}\mathbb{R})$ tal que μ es invariante bajo translación y $0 < \mu([0, 1]) < \infty$.
(b) Existe un conjunto $M \subseteq \mathbb{R}$ que no es Lebesgue-medible.

Hint para (a):

- Defina una relación de equivalencia sobre \mathbb{R} por $x \sim y : \iff x - y \in \mathbb{Q}$.
- De cada clase escoja un representante en $[0, 1]$. Sea M la unión de ellos.
- Si μ es una medida como en (a), qué es $\mu(A) = ?$

- Sea λ la medida de Lebesgue en \mathbb{R} y \mathfrak{M} la σ -álgebra de los subconjuntos λ -medibles de \mathbb{R} . Muestre: Si $M \in \mathfrak{M}$ y $\mu(M) > 0$, existe un $N \in \mathfrak{M}$ tal que $N \subseteq M$ y

$$\mu(N) > 0 \quad \text{y} \quad \mu(M \setminus N) > 0.$$

(Se dice que *la medida de Lebesgue no tiene átomos*.)

- Sea (X, \mathfrak{M}, μ) un espacio de medida no completo y $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $f = g$ μ -casi siempre. Se puede concluir que

$$f \text{ medible} \iff g \text{ medible} ?$$

- Sea (X, \mathfrak{M}, μ) como en el problema 1 del taller 2. Determine todas las funciones medibles $f : X \rightarrow [0, \infty]$ y su integral $\int_X f \, d\mu$.