Universidad de los Andes
MATE-4220

Medida e Integración

Taller 1

Anillos, álgebras, contenidos, medidas.

Fecha de entrega: 12 de Agosto 2011

---

1. Sea X un conjunto contable infinito y defina

$$\mathfrak{A} := \{A \in X : A \text{ ó } X \setminus A \text{ es finito }\},$$

$$\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \qquad \mu(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ finito}, \\ 1, & A \text{ infinito}. \end{cases}$$

   (a) Muestre que es un álgebra sobre X.
   (b) Muestre que μ es un contenido, pero no es una premedida.

2. Muestre que el conjunto $\{Q_{z,k} : k \in \mathbb{N}_0, z \in \mathbb{Z}^n\}$ de los cubos elementales

$$Q_{z,k} := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : z_j/2^k \leq x_j \leq (z_j + 1)/2^k,\ j = 1, \ldots, n\}$$

   genera la topología generada por la métrica euclidiana en $\mathbb{R}^n$. (Es decir: cada conjunto abierto $\mathbb{R}^n$ es unión enumerable de cubos $Q_{z,k}$.)

3. (a) Muestre que una σ-álgebra o es finita o no contable.
   (b) Un σ-anillo con infinitos elementos contiene una sucesión de subconjuntos disjuntos no vacíos.

4. Sea $I = \{[a, b[\cap \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\} \cup \{\emptyset\}$, $\mu([a, b[) = b - a$ para $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$, y $\mu(\emptyset) = 0$. Muestre:

   (i) I es un semianillo sobre $\mathbb{Q}$.
   (ii) μ es un contenido sobre I.
   (iii) μ no es una medida sobre I.