

Álgebra lineal

Taller 10

Bases y dimensión.

Fecha de entrega: 23 de octubre de 2026

4 pts.

1. Encuentre $\dim U$ y una base para U si

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x + 2y + 3z + 4w = 0, \\ x - y + 2z - w = 0, \\ 2x + y + 5z + 3w = 0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

3 pts.

2. Sea F el plano dado por $F : 2x - 5y + 3z = 0$.

- (a) Demuestre que F es subespacio de $\mathbb{R}^3$ y encuentre vectores $\vec{u}$ y $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que $F = \text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}\}$.
- (b) Encuentre un vector $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$, distinto de $\vec{u}$ y $\vec{w}$, tal que $\text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}\} = F$.
- (c) Encuentre un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\} = \mathbb{R}^3$.

6 pts.

3. (a) Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Determine si estos vectores generan el espacio $\mathbb{R}^3$. Si lo hacen, escoja una base de $\mathbb{R}^3$ de los vectores dados.

- (b) Sean $p_1 = x^2 + 7$, $p_2 = x + 1$, $p_3 = 3x^3 + 7x$. Determine si los polinomios p_1, p_2, p_3 son linealmente independientes. Si lo son, complételos a una base en P_3 . Encuentre $\dim(\text{span}\{p_1, p_2, p_3\})$.

7 pts.

4. Para los siguientes conjuntos, encuentre una base y la dimensión, si es posible. Recuerde que P_n es el espacio de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales.

- (a) $W_1 := \{p \in P_3 : p(0) - p(1) = 0, p'(1) = 0\}$.
- (b) $W_2 := \{A = (a_{jk})_{j,k=1}^n \in M(n \times n) : A \text{ es una matriz diagonal y } \text{tr } A = 0\}$
donde $\text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ es la *traza* de A .
- (c) $W_3 := \text{span}\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$
donde $C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C_4 = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- (d) $W_4 := \{A \in M(3 \times 3) : \det A = 0\}$.