

Álgebra lineal

Taller 8

Determinantes. Espacios vectoriales.

Fecha de entrega: 09 de octubre de 2026

3 pts.

1. Determine todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que las siguientes matrices son invertibles.

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & x-5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & x & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 11-x & 5 & -50 \\ 3 & -x & -15 \\ 2 & 1 & -x-9 \end{pmatrix}.$$

1 pts.

2. Encuentre por lo menos cuatro matrices 3×3 cuyo determinante es 18.

4 pts.

3. Calcule $\det B_n$ donde B_n es la matriz en $M(n \times n)$ cuyas entradas en la diagonal son 0 y todas las demás entradas son 1, es decir:

$$B_1 = 0, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

¿Cómo cambia la respuesta si en vez de 0 hay x en la diagonal?

3 pts.

4. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. De la siguiente lista escoja 6 numerales y diga si o no son subespacios de $M(m \times n)$. Pruebe su afirmación.

- (I) Todas matrices con $a_{11} = 0$.
- (II) Todas matrices con $a_{11} = 3$.
- (III) Todas matrices con $a_{12} = \mu a_{11}$ para un $\mu \in \mathbb{R}$ fijo.
- (IV) Todas matrices cuya primera columna coincide con la última columna.

Para los siguientes numerales supongamos que $m = n$.

- (v) Todas las matrices simétricas (es decir, todas las matrices A con $A^t = A$).
- (vi) Todas las matrices que no son simétricas.
- (vii) Todas las matrices antisimétricas (es decir, todas las matrices A con $A^t = -A$).
- (viii) Todas las matrices diagonales.
- (ix) Todas las matrices triangular superior.
- (x) Todas las matrices triangular inferior.
- (xi) Todas las matrices invertibles.
- (xii) Todas las matrices no invertibles.
- (xiii) Todas las matrices con $\det A = 1$.

5. Considere los sistemas de ecuaciones lineales

$$(1) \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}, \quad (2) \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 4x + 5y + 6z = 9 \\ 7x + 8y + 9z = 15 \end{cases}.$$

Sea U el conjunto de todas las soluciones de (1) y W el conjunto de todas las soluciones de (2). Note que se pueden ver como subconjuntos de $\mathbb{R}^3$.

3 pts.

(a) Demuestre que U es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y descríballo geoméricamente.

1 pts.

(b) Demuestre que W no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

3 pts.

(c) Demuestre que W es un subespacio afín¹ de $\mathbb{R}^3$ y descríballo geoméricamente.

Ejercicios voluntarios²

6. Sea U un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\mathbb{R}^n \setminus U$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

7. (a) Considere el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las siguientes operaciones:

$$\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_1 \end{pmatrix},$$

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \lambda \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

¿Es $\mathbb{R}^2$ con esta suma y producto con escalares un espacio vectorial?

(b) Considere el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las siguientes operaciones:

$$\boxplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boxdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \lambda \boxdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

¿Es $\mathbb{R}^2$ con esta suma y producto con escalares un espacio vectorial?

8. Sean $A \in M(m \times n)$ y sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^k$.

(a) Demuestre que $U = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

(b) Demuestre que $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

(c) ¿Los conjuntos $R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = (1, 1, \dots, 1)^t\}$ y $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} \neq \vec{0}\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$?

(d) Sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^k$ fijo. ¿El conjunto $T = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^k$?

(e) ¿Los conjuntos

$$S_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| = 1\}, \quad B_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \leq 1\}, \quad F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \geq 1\}$$

son subespacios de $\mathbb{R}^k$?

¹Un *subespacio afín* es lo que se obtiene al trasladar un subespacio por un vector fijo. Lo veremos en la clase después de receso.

²Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.