

Álgebra lineal

Taller 7

Matrices elementales; determinantes.

Fecha de entrega: 25 de septiembre de 2026

1. (a) Sea $A \in M(n \times n)$. Demuestre que $A + A^t$ es una matriz simétrica y que $A - A^t$ es una matriz antisimétrica.
- (b) Demuestre que toda matriz cuadrada es suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica. (Es decir: Si $A \in M(n \times n)$, entonces existen matrices $B, C \in M(n \times n)$ tal que B es simétrica, C es antisimétrica y $A = B + C$.)

2. Escoja cuatro de las siguientes afirmaciones y diga si son verdaderas o falsas y pruebe sus respuestas.
- (a) Si A es una matriz simétrica invertible, entonces A^{-1} es simétrica.
- (b) Si A, B son matrices simétricas, entonces AB es simétrica.
- (c) Si AB es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.
- (d) Si A, B son matrices simétricas, entonces $A + B$ es simétrica.
- (e) Si $A + B$ es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.
- (f) Si A es una matriz simétrica, entonces A^t es simétrica.
- (g) $AA^t = A^tA$ para toda matriz $A \in M(n \times n)$.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

- (a) Escriba A y A^{-1} como producto de matrices elementales.
- (b) Use el resultado de (a) para encontrar A^{-1} .

4. Para las siguientes matrices encuentre matrices elementales $E_1, \dots, E_n$ tal que $E_1 \cdot E_2 \cdots E_n \cdot A$ es de la forma triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Calcule el determinante¹ de las siguientes matrices. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

¹El determinante de matrices $n \times n$ definiremos en la clase el miércoles.

Ejercicios voluntarios²

6. Sea $A \in M(m \times n)$.
- (a) Demuestre que $\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^t \vec{y} \rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$.
 - (b) Sea $B \in M(n \times m)$ y suponga que $\langle B\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^t \vec{y} \rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$. Demuestre que $B = A^t$.
 - (c) Demuestre que $\langle AA^t \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
7. Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre que AA^t y $A^t A$ son matrices simétricas.
8. Sean $S_j(c), Q_{ij}(c), P_{ij}$ las matrices elementales introducidas en la clase.
- (a) Encuentre $(S_j(c))^{-1}, (Q_{ij}(c))^{-1}, (P_{ij})^{-1}$.
 - (b) Encuentre $(S_j(c))^t, (Q_{ij}(c))^t, (P_{ij})^t$.
9. (a) Sea $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2)$. Demuestre que P_{12} se deja expresar como producto de matrices elementales en forma $Q_{ij}(c)$ y $S_k(c)$.
- (b) Pruebe el caso general: Sea $P_{ij} \in M(n \times n)$. Demuestre que P_{ij} se deja expresar como producto de matrices elementales de la forma $Q_{kl}(c)$ y $S_m(c)$.
- Observación:** El ejercicio demuestra que en verdad solo hay dos tipos de matrices elementales ya que el tercero (las permutaciones) se dejan reducir a un producto apropiado de matrices de tipo $Q_{ij}(c)$ y $S_j(c)$.
10. El objetivo de este ejercicio es entender qué pasa con una matriz dada si la multiplicamos desde el lado derecho con una matriz elemental.
- Sea $A \in M(m \times n)$ y sea E una matriz elemental.
- (a) Demuestre que $(AE)^t = FA^t$ donde F es una matriz elemental. Diga cuál matriz es F (debe distinguir entre los tres tipos que E puede ser: $S_i(c), Q_{ij}(c)$ o P_{ij}).
 - (b) Use que $AE = ((AE)^t)^t$ y su resultado de (a) para describir en palabras como cambia A si la multiplicamos por el lado derecho con E (debe distinguir entre los tres tipos que E puede ser: $S_i(c), Q_{ij}(c)$ o P_{ij}).
11. De las siguientes matrices calcule el determinante. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -14 & 21 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

²Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.