

# Álgebra lineal

## Taller 3

Proyecciones ortogonales y producto cruz; rectas en  $\mathbb{R}^n$ .

Fecha de entrega: 28 de agosto de 2026

7 pts.

1. (a) Para las siguientes parejas  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  encuentre todos los  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son paralelos:

$$(i) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (ii) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (iii) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}.$$

- (b) Para las siguientes parejas  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  encuentre todos los  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son perpendiculares:

$$(i) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (ii) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$(iii) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 + \alpha \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (iv) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 + \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Sean  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  y  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

1 pts.

- (a) Calcule  $\text{proy}_{\vec{b}} \vec{a}$  y  $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b}$ .

2 pts.

- (b) Encuentre todos los vectores  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\|\text{proy}_{\vec{a}} \vec{v}\| = 0$ . Describa este conjunto geométricamente y haga un bosquejo.

2 pts.

- (c) Encuentre todos los vectores  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\|\text{proy}_{\vec{a}} \vec{v}\| = 2$ . Describa este conjunto geométricamente y haga un bosquejo.

1 pts.

3. (a) Calcule el área del triángulo con los vértices adyacentes  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(2, 3, 4)$ ,  $C(-1, 2, -5)$ .

1 pts.

- (b) Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2 pts.

- (c) Sean  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  los vectores del literal (b). ¿Cuántos vectores  $\vec{a}$  con norma 7 hay tal que el volumen del paralelepípedo generado por  $\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}$  sea 24? Diga geométricamente cómo se encuentran todos los  $\vec{a}$  con esta propiedad y calcule dos de ellos.

4 pts.

4. Dados líneas  $L_1$  y  $L_2$  y el punto  $P$ , determine:

- si  $L_1$  y  $L_2$  son paralelas,
- si  $L_1$  y  $L_2$  tienen un punto de intersección,
- si  $P$  pertenece a  $L_1$  y/o a  $L_2$ ,
- una recta paralela a  $L_2$  que pase por  $P$ .

$$(a) \quad L_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4}, \quad P(5, 2, 11).$$

$$(b) \quad L_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L_2 : x = t + 1, y = 3t - 4, z = -t + 2, \quad P(5, 7, 2).$$

---

---

### Ejercicios voluntarios<sup>1</sup>

---

---

5. Sean  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$  con  $\vec{b} \neq \vec{0}$ .
- (a) Demuestre que  $\|\text{proy}_{\vec{b}} \vec{a}\| \leq \|\vec{a}\|$ .
  - (b) Encuentre condiciones para  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  para que  $\|\text{proy}_{\vec{b}} \vec{a}\| = \|\vec{a}\|$ .
  - (c) ¿Es cierto que  $\|\text{proy}_{\vec{b}} \vec{a}\| \leq \|\vec{b}\|$ ?
6. (a) Demuestre que no existe un elemento neutral para el producto cruz en  $\mathbb{R}^3$ . Es decir: Demuestre que no existe ningún vector  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  tal que  $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{w}$  para todo  $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ .
- (b) Sea  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ .
- (I) Encuentre todos los vectores  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  tales que  $\vec{a} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,
  - (II) Encuentre todos los vectores  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  tales que  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 4$ .

---

<sup>1</sup>Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.