

Álgebra lineal

1. Sea $Q \in M(n \times n)$ una matriz ortogonal. Demuestre que para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\langle Q\vec{x}, Q\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

Concluya que

- (a) Q no cambia magnitudes de vectores, es decir que $\|Q\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$;
 (b) Q no cambia ángulos entre vectores, es decir que $\angle(Q\vec{x}, Q\vec{y}) = \angle(\vec{x}, \vec{y})$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

2. Dados la matriz A y los vectores u y w :

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -18 \\ -30 & -20 & 36 \\ -6 & -6 & 16 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Diga si los vectores u y w son autovectores de A . Si lo son, cuáles son los valores propios correspondientes?
 (b) Calcule todos los valores propios de A .

3. Encuentre los vectores y espacios propios de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Encuentre los valores propios, los espacios propios y el polinomio característico de la siguiente matriz $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Hint. Encuentre la dimensión del kernel de A . ¿Qué nos dice sobre el polinomio característico? Después mire la imagen.

Ejercicios voluntarios¹

5. Encuentre los valores propios y los espacios propios de las siguientes matrices $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix},$$

6. (a) Sea $\varphi \in \mathbb{R}$ y sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$. Demuestre que \vec{v}_1, \vec{v}_2 es una base ortonormal de \mathbb{R}^2 .
- (b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Encuentre la matriz $Q(\alpha) \in M(2 \times 2)$ que describe rotación por α contra las manecillas del reloj.
- (c) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Explique por qué es claro que $Q(\alpha)Q(\beta) = Q(\alpha + \beta)$. Use esta relación para concluir las identidades trigonométricas

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

7. Sea $Q \in M(2 \times 2)$ una matriz ortogonal. Demuestre que es de la forma $Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ o $Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ para un $\varphi \in \mathbb{R}$.
-

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Un *producto interno* es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ tal que para todo $x, y, z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

- (I) $\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$, (Linealidad en la primera componente)
- (II) $\langle x, z \rangle = \overline{\langle x, z \rangle}$ (Simetría; la barra significa conjugación compleja.)
- (III) $\langle x, x \rangle \geq 0$,
- (IV) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$,

Observe que

- (i) y (iii) implican $\langle x, \lambda y + z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,
- (ii) implica que $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$

Definición. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y sean $x, y \in V$. Entonces x es *ortogonal a* y si y solo si $\langle x, y \rangle = 0$. Notación en este caso: $x \perp y$.

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

Ejemplos. El producto punto en \mathbb{R}^n es un producto interno. Más ejemplos hay en Ejercicio 2.

Definición. Sea $A \in M(n \times n)$. Entonces la *matriz adjunta* es aquella que conseguimos de A al transponerla y conjugar sus entradas (como números complejos).

Ejemplos.
$$\begin{pmatrix} 3+1 & 5-4i \\ 8 & 9i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 3-1 & 8 \\ 5+4i & -9i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+2i & 3+4i \\ 5+6i & 7+8i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1-2i & 5-6i \\ 3-4i & 7-8i \end{pmatrix}.$$

Ejercicios.

1. (a) Demuestre que lo siguiente define un producto interno en \mathbb{C}^n :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}, \quad \text{para } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t, \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^t \in \mathbb{C}^n.$$

- (b) Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Demuestre que A^* es la única matriz con

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{C}^n.$$

2. (a) Sea V el espacio de todas las funciones continuas $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Claramente V es un espacio vectorial. Demuestre que lo siguiente define un producto interno en V :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx, \quad \text{para } f, g \in V. \quad (1)$$

- (b) Demuestre que el sistema de las funciones

$$v_0(x) = 1, v_n(x) = \sin(n\pi x), w_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N},$$

es un sistema ortogonal en $C[0, 1]$ con el producto interno definido en (1).

- (c) Aplique el proceso de Gram-Schmidt a $p_0 = 1$, $p_1 = x$, $p_2 = x^2$, $p_3 = x^3$ para obtener una base ortonormal $\{q_0, \dots, q_3\}$ de P_3 con el producto interno definido en (1).

Observación. Salvo constantes multiplicativas, el polinomio q_j es el *polinomio j -ésimo de Legendre*.

Definición. Sean U, V espacios vectoriales con normas $\|\cdot\|_U$ y $\|\cdot\|_V$. Una función lineal $T : U \rightarrow V$ se llama *isometría* si para todo $u \in U$

$$\|Tu\|_V = \|u\|_U.$$

Es claro que isometrías son inyectivas (porque si $Tu = 0$, entonces $\|u\|_U = \|Tu\|_V = 0$, por tanto $u = 0$).

Ejemplos.

- Rotaciones en \mathbb{R}^n .
- Reflexiones en \mathbb{R}^n .

Ejercicios.

1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $Q, T \in M(n \times n)$.

- (a) Demuestre que T es una isometría si y solo si $\langle T\vec{x}, T\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ (es decir: una isometría mantiene ángulos).
- (b) Demuestre que Q es una matriz ortogonal si y solo si Q es una isometría.

Definición. Un *grupo* es un conjunto no-vacío G junto con una operación $G \times G \rightarrow G$ tal que:

- (I) *Existencia de un elemento neutro:* existe un $e \in G$ tal que $eg = ge = g$ para todo $g \in G$.
- (II) *Existencia de inversos:* para todo $g \in G$ existe un $\tilde{g} \in G$ tal que $g\tilde{g} = \tilde{g}g = e$.
- (III) *Asociatividad:* para todo $g, h, k \in G$ se tiene que $(gh)k = g(hk)$.

El grupo G se llama *conmutativo* si además $gh = hg$ para todo $g, h \in G$.

Ejemplos.

- (I) \mathbb{Z} con la suma;
- (II) \mathbb{Q} con la suma;
- (III) \mathbb{R} con la suma;
- (IV) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ con el producto;
- (V) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con el producto;
- (VI) funciones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con la suma;
- (VII) $M(n \times n)$ con la suma;
- (VIII) cada espacio vectorial con su suma;
- (IX) funciones biyectivas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con la composición;
- (X) $\{A \in M(n \times n) : \det(A) \neq 0\}$ con producto;
- (XI) funciones lineales biyectivas $V \rightarrow V$ con la composición donde V es un espacio vectorial.

Los ejemplos (i)–(viii) son grupos conmutativos; los ejemplos (ix)–(xi) son no-conmutativos para $n \geq 2$.

Ejercicios.

- Demuestre que los ejemplos arriba son grupos.
- Sean $O(n) = \{Q \in M(n \times n) : Q \text{ es matriz ortogonal}\}$ y $SO(n) = \{Q \in O(n) : \det Q = 1\}$.
 - Demuestre que $O(n)$ con la composición es un grupo. Es decir, hay que probar que:
 - Para todo $Q, R \in O(n)$, la composición QR es un elemento en $O(n)$.
 - Existe un $E \in O(n)$ tal que $QE = Q$ y $EQ = Q$ para todo $Q \in O(n)$.
 - Para todo $Q \in O(n)$ existe un elemento inverso \tilde{Q} tal que $\tilde{Q}Q = Q\tilde{Q} = E$.
 - ¿Es $O(n)$ conmutativo (es decir, se tiene $QR = RQ$ para todo $Q, R \in O(n)$)?
 - Demuestre que $SO(n)$ con la composición es un grupo.