

Álgebra lineal

Representación matricial de transformaciones lineales.

Bases ortonormales.

Fecha de entrega: 7 de mayo de 2026

1. En \mathbb{R}^3 considere el plano $E : 2x - y + z = 0$. Sea Q la proyección ortogonal sobre E .

2 pts.

(a) Encuentre la representación matricial de Q (con respecto a la base canónica de \mathbb{R}^3).

1 pts.

(b) Encuentre el kernel de Q y dé una interpretación geométrica.

1 pts.

(c) Encuentre la imagen de Q y dé una interpretación geométrica.

Sugerencia: Primero encuentre una base de \mathbb{R}^3 adaptada al problema y encuentre la representación matricial con respecto a esta base. Después haga un cambio de base para conseguir una representación matricial con respecto a la base canónica.

Alternativamente puede usar una base ortogonal para E y completarla a una base ortogonal para \mathbb{R}^3 . Así es fácil calcular $Q\vec{x}$ para $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

2. Considere el plano E en \mathbb{R}^3 dado por $x + y - 3z = 0$.

2 pts.

(a) Encuentre una base ortonormal para E .

2 pts.

(b) Complete la base encontrada en el literal anterior a una base ortonormal de \mathbb{R}^3 .

2 pts.

(c) Escriba el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de la base encontrada en el literal anterior.

3. Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ y sea $U = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

1 pts.

(a) Encuentre una base para el complemento ortogonal para U . Diga si su base encontrada es una base ortogonal.

1 pts.

(b) Encuentre la dimensión de U y la dimensión de su complemento ortogonal.

4. Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

2 pts.

(a) Sea $P(0, 2, 5)$. Encuentre el punto $Q \in U$ que esté más cercano a P y calcule la distancia entre P y Q .

1 pts.

(b) ¿Hay un punto $R \in U$ que esté a una distancia máxima de P ?

5. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y sea $U = \text{span}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \subseteq \mathbb{R}^5$.

2 pts.

(a) Demuestre que \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} son linealmente independientes.

3 pts.

(b) Use el proceso de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal para U .

(c) **Voluntario:** Encuentre una base para U^\perp .

Ejercicios voluntarios¹

6. Sean B , C , D y S las transformaciones lineales del Ejercicio 4 del Taller 10. Representélas como matrices y utilice estas representaciones para encontrar sus kernels e imágenes y las dimensiones correspondientes.

7. Sea $W = \text{gen}\{(1, 1, 1, 1)^t, (2, 1, 1, 0)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Encuentre una base ortogonal para W .

(b) Sean $A_1(1, 2, 0, 1)$, $A_2(11, 4, 4, -3)$, $A_3(0, -1, -1, 0)$ puntos en \mathbb{R}^4 . Para cada $j = 1, 2, 3$ encuentre el punto $P_j \in W$ que esté más cercano a A_j y calcule la distancia entre A_j y P_j .

(c) Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre W (en la base estándar).

8. Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Demuestre que \vec{v} y \vec{w} son linealmente independientes y encuentre una base ortonormal para $U = \text{span}\{\vec{v}, \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

9. Encuentre una base ortonormal para U^\perp donde $U = \text{gen}\{(1, 0, 2, 4)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

10. Sea V un espacio vectorial y sean $U, W \subseteq V$ subespacios.

(a) Demuestre que $U \cap W$ es un subespacio.

(b) Demuestre que $\dim U + \dim W = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

(c) Suponga que $U \cap W = \{0\}$. Demuestre que $\dim U \oplus W = \dim U + \dim W$.

(d) Demuestre que U^\perp es un subespacio de V y que $(U^\perp)^\perp = U$.

11. Sean $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Suponga que $\vec{w} \neq \vec{0}$ y que $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ es ortogonal a todos los vectores \vec{v}_j . Demuestre que $\vec{w} \notin \text{gen}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$. Se sigue que el sistema $\vec{w}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ es linealmente independiente?

12. (a) Complete $\begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{15/16} \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para \mathbb{R}^2 . ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?

(b) Complete $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para \mathbb{R}^3 . ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?

(c) Complete $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para \mathbb{R}^3 . ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?

13. En \mathbb{R}^2 considere la recta $L : 2x - 3y = 0$. Sea P la proyección ortogonal sobre L .

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

- (a) Encuentre la representación matricial de P (con respecto a la base canónica de \mathbb{R}^2).
- (b) Encuentre el kernel de P y dé una interpretación geométrica.
- (c) Encuentre la imagen de P y dé una interpretación geométrica.