Álgebra lineal

Taller 11

Kernels, imágenes de funciones lineales.

Fecha de entrega: 23 de abril de 2026

---

3 pts. 1. Considere los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Demuestre que $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Escriba los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ como combinaciones lineales de la base $\mathcal{B}$.

2. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2 pts. (a) Demuestre que E y F son invertibles. Describa cómo actuan geométricamente en $\mathbb{R}^2$.

2 pts. (b) Calcule $\mathrm{Im}(A)$, $\ker(A)$ y sus dimensiones. Dibuja $\mathrm{Im}(A)$ y $\ker(A)$, diga qué objetos geométricos son.

2 pts. (c) Calcule $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Im}(FA)$, $\mathrm{Im}(AE)$ y sus dimensiones. Dibújalos y diga cuál es la relación entre ellos.

2 pts. (d) Calcule $\ker(A)$, $\ker(FA)$, $\ker(AE)$ y sus dimensiones. Dibújalos y diga cuál es la relación entre ellos.

6 pts. 3. De las siguientes matrices, encuentre una base para su kernel y la dimensión y encuentre una base para su imagen y la dimensión.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 13 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & 25 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

(La “receta” para calcular imágenes de matrices vamos a ver en la clase el lunes. Si ya se quiere adelantar, pueden mirar p. 240 en las notas de clase.)

1 pts. 4. (a) Encuentre por lo menos dos diferentes funciones lineales biyectivas de $M(2 \times 2)$ a P_3.

1 pts. (b) Existe una función lineal biyectiva $S : M(2 \times 2) \to P_k$ para $k \in \mathbb{N},\ k \neq 3$?

1 pts. 5. Sea $A \in M(m \times n)$ y suponga que A es biyectivo. Demuestre que $m = n$.

Ejercicios voluntarios[1]

---

6. Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre:

(I) A inyectiva $\Longrightarrow m \geq n$.

(II) A sobreyectiva $\Longrightarrow n \geq m$.

Demuestre que la implicación “$\Longleftarrow$” en (i) and (ii) en general es falsa.

[1]Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.