

Álgebra lineal

1 pts.

1. Encuentre $\dim U$ y una base para U si

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : \begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 0, \\ x - y + 2z - w = 0, \\ 2x + y + 5z + 3w = 0 \end{cases} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

3 pts.

2. Sea F el plano dado por $F : 2x - 5y + 3z = 0$.

- (a) Demuestre que F es subespacio de \mathbb{R}^3 y encuentre vectores \vec{u} y $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que $F = \text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}\}$.
- (b) Encuentre un vector $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$, distinto de \vec{u} y \vec{w} , tal que $\text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}\} = F$.
- (c) Encuentre un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\} = \mathbb{R}^3$.

6 pts.

3. (a) Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Determine si estos vectores generan el espacio \mathbb{R}^3 . Si lo hacen, escoja una base de \mathbb{R}^3 de los vectores dados.

(b) Sean $p_1 = x^2 + 7$, $p_2 = x + 1$, $p_3 = 3x^3 + 7x$. Determine si los polinomios p_1, p_2, p_3 son linealmente independientes. Si lo son, complételos a una base en P_3 . Encuentre $\dim(\text{span}\{p_1, p_2, p_3\})$.

10 pts.

4. Determine si las siguientes funciones son lineales. Si lo son, calcule el kernel y la dimensión del kernel.

(a) $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow M(2 \times 2)$, $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y & x - z \\ x + y - 3z & z \end{pmatrix}$,

(b) $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow M(2 \times 2)$, $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x - z \\ x + y - 3z & z \end{pmatrix}$,

(c) $C : M(2 \times 2) \rightarrow M(2 \times 2)$, $C(M) = M + M^t$

(d) $D : P_3 \rightarrow P_4$, $Dp = p' + xp$,

(e) $S : P_3 \rightarrow M(2 \times 3)$, $S(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a + b & b + c & c + d \\ 0 & a + d & 3 \end{pmatrix}$.