

# Álgebra lineal

4 pts.

1. Calcule  $\det B_n$  donde  $B_n$  es la matriz en  $M(n \times n)$  cuyas entradas en la diagonal son 0 y todas las demás entradas son 1, es decir:

$$B_1 = 0, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

¿Cómo cambia la respuesta si en vez de 0 hay  $x$  en la diagonal?

3 pts.

2. Sean  $m, n \in \mathbb{N}$ . De la siguiente lista escoja 6 numerales y diga si o no son subespacios de  $M(m \times n)$ . Pruebe su afirmación.

- (I) Todas matrices con  $a_{11} = 0$ .
- (II) Todas matrices con  $a_{11} = 3$ .
- (III) Todas matrices con  $a_{12} = \mu a_{11}$  para un  $\mu \in \mathbb{R}$  fijo.
- (IV) Todas matrices cuya primera columna coincide con la última columna.

Para los siguientes numerales supongamos que  $m = n$ .

- (V) Todas las matrices simétricas (es decir, todas las matrices  $A$  con  $A^t = A$ ).
- (VI) Todas las matrices que no son simétricas.
- (VII) Todas las matrices antisimétricas (es decir, todas las matrices  $A$  con  $A^t = -A$ ).
- (VIII) Todas las matrices diagonales.
- (IX) Todas las matrices triangular superior.
- (X) Todas las matrices triangular inferior.
- (XI) Todas las matrices invertibles.
- (XII) Todas las matrices no invertibles.
- (XIII) Todas las matrices con  $\det A = 1$ .

3. Considere los sistemas de ecuaciones lineales

$$(1) \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}, \quad (2) \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 4x + 5y + 6z = 9 \\ 7x + 8y + 9z = 15 \end{cases}.$$

Sea  $U$  el conjunto de todas las soluciones de (1) y  $W$  el conjunto de todas las soluciones de (2). Note que se pueden ver como subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$ .

3 pts.

- (a) Demuestre que  $U$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^3$  y descríballo geoméricamente.

1 pts.

- (b) Demuestre que  $W$  no es un subespacio de  $\mathbb{R}^3$ .

3 pts.

- (c) Demuestre que  $W$  es un subespacio afín de  $\mathbb{R}^3$  y descríballo geoméricamente.

- 2 pts. 4. (a) Sean  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Escriba  $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  como combinación lineal de  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ .
- 2 pts. (b) ¿Es  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  combinación lineal de  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ?
- 2 pts. (c) ¿Es  $A = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 50 & 8 \end{pmatrix}$  combinación lineal de  
 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ ?

### Ejercicios voluntarios<sup>1</sup>

5. Sea  $U$  un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ . Demuestre que  $\mathbb{R}^n \setminus U$  no es un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ .
6. (a) Considere el conjunto  $\mathbb{R}^2$  con las siguientes operaciones:

$$\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 + y_1 \end{pmatrix},$$

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \lambda \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

¿Es  $\mathbb{R}^2$  con esta suma y producto con escalares un espacio vectorial?

- (b) Considere el conjunto  $\mathbb{R}^2$  con las siguientes operaciones:

$$\boxplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boxdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \lambda \boxdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

¿Es  $\mathbb{R}^2$  con esta suma y producto con escalares un espacio vectorial?

7. Sean  $A \in M(m \times n)$  y sea  $\vec{a} \in \mathbb{R}^k$ .

- (a) Demuestre que  $U = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^m$ .
- (b) Demuestre que  $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ .
- (c) ¿Los conjuntos  $R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = (1, 1, \dots, 1)^t\}$  y  $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} \neq \vec{0}\}$  son subespacios de  $\mathbb{R}^n$ ?
- (d) Sea  $\vec{a} \in \mathbb{R}^k$  fijo. ¿El conjunto  $T = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0\}$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^k$ ?
- (e) ¿Los conjuntos

$$S_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| = 1\}, \quad B_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \leq 1\}, \quad F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \geq 1\}$$

son subespacios de  $\mathbb{R}^k$ ?

<sup>1</sup>Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.