Álgebra lineal

Taller 7

Matrices elementales; determinantes. Fecha de entrega: 12 de marzo de 2026

---

4 pts. **1.** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

(a) Escriba A y A^{-1} como producto de matrices elementales.

(b) Use el resultado de (a) para encontrar A^{-1}.

6 pts. **2.** Para las siguientes matrices encuentre matrices elementales $E_1, \dots, E_n$ tal que $E_1 \cdot E_2 \cdot \dots \cdot E_n \cdot A$ es de la forma triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

6 pts. **3.** Calcule el determinante de las siguientes matrices. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

3 pts. **4.** Determine todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que las siguientes matrices son invertibles.

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} x & x & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 11-x & 5 & -50 \\ 3 & -x & -15 \\ 2 & 1 & -x-9 \end{pmatrix}.$$

1 pts. **5.** Encuentre por lo menos cuatro matrices 3×3 cuyo determinante es 18.

Ejercicios voluntarios[1]

---

6. Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre que AA^t y A^tA son matrices simétricas.

7. Sean $S_j(c), Q_{ij}(c), P_{ij}$ las matrices elementales introducidas en la clase.

(a) Encuentre $(S_j(c))^{-1}, (Q_{ij}(c))^{-1}, (P_{ij})^{-1}$.

(b) Encuentre $(S_j(c))^t, (Q_{ij}(c))^t, (P_{ij})^t$.

8. (a) Sea $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2\times 2)$. Demuestre que P_{12} se deja expresar como producto de matrices elementales en forma $Q_{ij}(c)$ y $S_k(c)$.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

(b) Pruebe el caso general: Sea $P_{ij} \in M(n \times n)$. Demuestre que P_{ij} se deja expresar como producto de matrices elementales de la forma $Q_{kl}(c)$ y $S_m(c)$.

Observación: El ejercicio demuestra que en verdad solo hay dos tipos de matrices elementales ya que el tercero (las permutaciones) se dejan reducir a un producto apropiado de matrices de tipo $Q_{ij}(c)$ y $S_j(c)$.

9. El objetivo de este ejercicio es entender qué pasa con una matriz dada si la mulitiplicamos desde el lado derecho con una matriz elemental.

Sea $A \in M(m \times n)$ y sea E una matriz elemental.

(a) Demuestre que $(AE)^t = FA^t$ donde F es una matriz elemental. Diga cuál matriz es F (debe distinguir entre los tres tipos que E puede ser: $S_i(c), Q_{ij}(c)$ o P_{ij}).

(b) Use que $AE = ((AE)^t)^t$ y su resultado de (a) para describir en palabras como cambia A si la multiplicamos por el lado derecho con E (debe distinguir entre los tres tipos que E puede ser: $S_i(c), Q_{ij}(c)$ o P_{ij}).

10. De las siguientes matrices calcule el determinante. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -14 & 21 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}. \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$