

Álgebra lineal

Taller 6

Matrices inversas; matrices transpuestas.

Fecha de entrega: 05 de marzo de 2026

1. Una tienda vende dos tipos de cajitas de dulces:

Tipo A contiene 1 chocolate y 3 mentas, Tipo B contiene 2 chocolates y 1 menta.

1 pts.

- (a) Dé una ecuación de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$ que describe lo de arriba. Diga que significan los vectores $\vec{x}$ y $\vec{b}$.

1 pts.

- (b) Calcule, usando el resultado de (a), cuántos chocolates y cuántas mentas contienen:

(i) 1 caja de tipo A y 3 de tipo B,

(ii) 3 cajas de tipo A y 5 de tipo B.

2 pts.

- (c) Determine si es posible conseguir

(i) 5 chocolates y 15 mentas,

(iii) 21 chocolates y 23 mentas,

(ii) 2 chocolates y 11 mentas,

(iv) 14 chocolates y 19 mentas.

comprando cajitas de dulces en la tienda. Si es posible, diga cuántos de cada tipo se necesitan.

8 pts.

2. De las siguientes matrices determine si son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

3 pts.

3. (a) Calcule la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

- (b) Use el resultado del literal anterior para encontrar una vector $\vec{x}$ y matrices B, C, D tal que

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3 pts.

4. Para las incógnitas x, y y a, b consideramos los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$2x + 3y = a, \quad 5x - 2y = b \tag{1}$$

y

$$7a - 4b = 6, \quad 3a - 2b = 5. \tag{2}$$

- (a) Escriba ambos sistemas en forma matricial.

- (b) Use (a) para encontrar el sistema lineal para x, y que no contiene a las incógnitas a, b .

- (c) Encuentre a, b, x, y .

2 pts.

5. Escoja cuatro de las siguientes afirmaciones y diga si son verdaderas o falsas y pruebe sus respuestas.¹

- (a) Si A es una matriz simétrica invertible, entonces A^{-1} es simétrica.
- (b) Si A, B son matrices simétricas, entonces AB es simétrica.
- (c) Si AB es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.
- (d) Si A, B son matrices simétricas, entonces $A + B$ es simétrica.
- (e) Si $A + B$ es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.
- (f) Si A es una matriz simétrica, entonces A^t es simétrica.
- (g) $AA^t = A^tA$ para toda matriz $A \in M(n \times n)$.

Ejercicios voluntarios²

6. Sea $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ y considere la ecuación

$$A_k \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

- (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene exactamente una solución para $\vec{x}$.
- (b) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene infinitas soluciones para $\vec{x}$.
- (c) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene ninguna solución para $\vec{x}$.
- (d) Haga lo mismo para $A_k \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en vez de $(*)$.
- (e) Haga lo mismo para $A_k \vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ en vez de $(*)$ donde $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ es un vector arbitrario distinto de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. Sean $R, S \in M(n, n)$ matrices invertibles. Demuestre que

$$RS = SR \iff R^{-1}S^{-1} = S^{-1}R^{-1}.$$

¹Puede usar las siguientes propiedades: $(A + cB)^t = A^t + cB^t$, $(A^t)^t = A$, $(AB)^t = B^tA^t$.

²Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

8. **Inversa de una matriz a bloques.** Sean A, B, C, D matrices $n \times n$ y suponga que A es invertible. Consideramos la matriz a bloques

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

(a) Demuestre que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ CA^{-1} & \text{id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{id} & A^{-1}B \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}.$$

(b) Demuestre que $\begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ CA^{-1} & \text{id} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \text{id} & A^{-1}B \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}$ son invertibles y encuentre sus inversas.

(c) Demuestre que, bajo la hipótesis que A es invertible, la matrix $\mathcal{T}$ es invertible si y solo si $D - CA^{-1}B$ lo es. En este caso se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} \text{id} & A^{-1}B \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ CA^{-1} & \text{id} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \text{id} & -A^{-1}B \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ -CA^{-1} & \text{id} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1}\{A + B[D - CA^{-1}B]^{-1}C\}A^{-1} & -A^{-1}B[D - CA^{-1}B]^{-1} \\ -[D - CA^{-1}B]^{-1}CA^{-1} & [D - CA^{-1}B]^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d) Verifique que para el caso cuando A, B, C, D son números coincide con la fórmula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(e) ¿Cómo serían la fórmulas si asumimos que D es invertible?